

УДК 524.38:524.45-32

О ПРИЛИВНЫХ РАССТОЯНИЯХ МЕЖДУ КОМПОНЕНТАМИ ШИРОКИХ ДВОЙНЫХ ЗВЕЗД В ПЛЕЯДАХ

© 2023 В. М. Данилов^{1*}¹ Коуровская астрономическая обсерватория им. К. А. Бархатовой Уральского федерального университета им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, 620000 Россия

Поступила в редакцию 5 мая 2022 года; после доработки 17 ноября 2022 года; принята к публикации 29 ноября 2022 года

В работе выполнены оценки приливных расстояний $|\xi_{c,1,2}|$ между компонентами широких двойных звезд (ДЗ) в Плеядах. Использовались данные о параметрах скопления Плеяды и широких ДЗ в Плеядах, полученные ранее по данным Gaia DR2. Рассмотрены две модели скопления в виде однородного и неоднородного по плотности гравитирующего шара. С помощью интегралов углового момента и энергии движения центров масс ДЗ построены две эллиптические орбиты и две незамкнутые «розеточного вида» траектории центров масс ДЗ относительно центра масс системы трех тел (компоненты ДЗ и скопление). Для трех тел в неравномерно вращающейся относительно их центра масс системе координат с началом в центре масс ДЗ записаны уравнения движения. Для модели однородного скопления получена формула для величины $|\xi_{c,1,2}|$ для ДЗ, движущейся по эллиптической орбите. Получены интегралы углового момента и энергии движения компонентов ДЗ и трех тел системы. Проведены оценки размеров области под поверхностью нулевых скоростей (ПНС) компонентов ДЗ вдоль осей системы координат с началом в центре масс ДЗ. Показано, что в модели однородного скопления размеры области под ПНС компонентов ДЗ в перицентрах рассмотренных орбит меньше, чем в апоцентрах, а на внутренней и внешней частях орбит ДЗ существуют разные по числу и величине ограничения на размеры области под ПНС компонентов ДЗ. Для модели неоднородного скопления получено уравнение для величины $|\xi_{c,1,2}|$ для ДЗ, движущейся по «розеточной» траектории относительно центра масс трех тел. Численно определены величины $|\xi_{c,1,2}|$ для ДЗ в разных точках двух таких траекторий. С помощью интеграла энергии $E_{1,2,3}$ движения трех тел определены размеры области под ПНС компонентов ДЗ. При увеличении расстояния центра масс ДЗ от центра масс трех тел в модели неоднородного скопления отмечено увеличение размеров области под ПНС компонентов ДЗ, а также существование более сложных, чем в однородном скоплении, ограничений на размеры этой области. Взаимные расстояния $r_{i,j}$ между компонентами широких ДЗ в Плеядах заключены между максимальными и минимальными величинами $|\xi_{c,1,2}|$ для ДЗ на «розеточных» траекториях. Увеличение $r_{i,j}$ с расстояниями r_i компонентов ДЗ от центра скопления обусловлено в основном движением ДЗ вдоль своих траекторий в Плеядах. Рассмотрены и другие приложения интеграла $E_{1,2,3}$ для оценки параметров ДЗ в Плеядах.

Ключевые слова: *звезды: кинематика и динамика — рассеянные скопления и ассоциации: отдельные: Плеяды*

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в ряде работ (Caballero et al. 2018, Danilov 2021a, De Furio et al. 2022, Deacon and Kraus 2020, Hillenbrand et al. 2018, Jerabkova et al. 2019) по данным наземных и спутниковых наблюдений были выделены десятки широких двойных звезд (ДЗ) — членов каждого из рассмотренных в этих статьях рассеянных звездных скоплений (РЗС), близких к Солнцу. В перечисленных работах обсуждаются параметры таких ДЗ,

их зависимости от параметров РЗС, а также зависимости параметров двойных звезд от расстояний до центров скоплений и от ориентации в скоплении векторов $\mathbf{r}_{1,2}$ взаимных расстояний между компонентами ДЗ. Многие (или все в работе Danilov (2021a)) широкие ДЗ, обнаруженные в указанных выше работах, не являются динамически активными парами звезд. Их модули энергии связи больше средней кинетической энергии одиночных звезд в скоплении (Aarseth 1971, Heggie 1975).

Исследование широких ДЗ в РЗС позволяет сделать важные выводы о механизмах формирования таких двойных звезд как на стадии формиро-

*E-mail: Vladimир.Danilov@urfu.ru

вания рассеянных скоплений в ядрах молекулярных облаков (Bate et al. 2002, Bodenheimer 2001, Bodenheimer and Burkert 2001, Offner et al. 2016, Raju et al. 2021), так и в процессе последующей динамической эволюции РЗС (Danilov 2021a; b, Heggie 1975, Reipurth et al. 2010). В работах Christian et al. (2022), Pearce et al. (2020) данные каталогов Gaia и миссии TESS используются для обсуждения ограничений на некоторые орбитальные элементы звезд-компонентов широких ДЗ и планет (или протопланетных дисков) с известными наклонами плоскостей орбит (Pearce et al. 2020), делаются выводы об избытке планет, у которых плоскости орбит почти совпадают с плоскостями орбит компонентов широких ДЗ, а также выводы о механизмах формирования орбит компонентов ДЗ и планет с близкими между собой плоскостями (Christian et al. 2022).

В работе Danilov (2021b) выполнен краткий обзор теоретических оценок влияния регулярного поля скопления на параметры ДЗ, рассмотрены широкие ДЗ, центры масс которых движутся радиально в модели скопления Плеяды. При обсуждении баланса сил, действующих на каждую звезд-компонент ДЗ, и вычислении приливных расстояний $r_{c,1,2}$ между ними, выполнен учет различий силового поля скопления в точках расположения звезд-компонентов широких ДЗ. Согласно Danilov (2021b), использование интегралов движения ДЗ в скоплении позволяет избежать предположений о форме траекторий движения звезд-компонентов ДЗ в скоплении.

В работе Danilov (2022) рассмотрены приливные ограничения на широкие ДЗ в зависимости от пространственной ориентации векторов $\mathbf{r}_{1,2}$ расстояний между компонентами ДЗ в скоплении. Разработана методика оценок параметров ориентации векторов $\mathbf{r}_{1,2}$ для широких ДЗ в РЗС по данным наблюдений. Рассмотрены оценки величин $r_{c,1,2}$ для широких ДЗ с круговыми орбитами их центров масс относительно центра масс системы ДЗ-скопление.

Представляет интерес разработка методов проведения оценок приливных расстояний между компонентами широких ДЗ в случае эллиптических орбит и незамкнутых траекторий движения центров масс ДЗ относительно общего центра масс системы ДЗ-скопление и применение таких оценок для изучения двойных звезд в ближайших РЗС. Согласно Danilov (2021b), оценки параметров и механизмы формирования широких ДЗ могут быть использованы для анализа динамического состояния РЗС (Danilov 2005; 2021b). Сравнение приливных расстояний $r_{c,1,2}$ с наблюдательными данными о расстояниях $r_{1,2}$ между компонентами ДЗ позволяет:

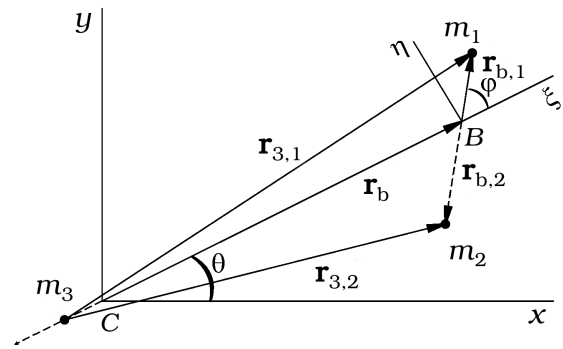


Рис. 1. Расположение векторов \mathbf{r}_b , $\mathbf{r}_{3,i}$ и $\mathbf{r}_{b,i}$ в системе гравитирующих тел.

- 1) объяснить наличие большого числа широких ДЗ, обнаруженных в ближайших РЗС в ряде работ в последние годы (очень большими приливными расстояниями, обусловленными влиянием на широкие ДЗ силового поля скопления);
- 2) обосновать вывод о нестационарности РЗС (т.к. все широкие ДЗ имеют взаимные расстояния, превышающие приливные расстояния, обусловленные гравитационной связанностью ДЗ за счет взаимного притяжения между ее компонентами, что возможно лишь при колебаниях размеров и плотности скопления в настоящее время).

Цели и задачи данной работы — построение методики оценки приливных расстояний между компонентами широких ДЗ в РЗС в случае эллиптических орбит и незамкнутых траекторий движения центров масс ДЗ относительно общего центра масс системы ДЗ-скопление, исследование приливных ограничений на широкие ДЗ в Плеядах и обсуждение роли регулярного поля скопления в формировании широких ДЗ в Плеядах. Результаты исследования позволят уточнить особенности строения и формирования подсистемы широких ДЗ в скоплении Плеяды.

2. ДВОЙНЫЕ ЗВЕЗДЫ В МОДЕЛИ ОДНОРОДНОГО СКОПЛЕНИЯ

Следуя работе Danilov (2021b), рассмотрим модель гравитирующей системы (см. рис. 1), состоящей из двух звезд в виде точечных масс m_1 и m_2 , образующих широкую ДЗ, движущихся в поле сил однородного по плотности гравитирующего шара с массой m_3 , имитирующего звездное скопление. На рис. 1 положения звезд и центра масс шара-скопления показаны точками. Пусть $m_1 > m_2$. Обозначим $\mathbf{r}_{i,j} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$, где $\mathbf{r}_j = (x_j, y_j, z_j)$ — радиус-векторы центров масс m_j с началом

координат x, y, z в общем центре масс системы ($j = 1, 2, 3$) (на рис. 1 обозначен буквой C). Пусть $r_{i,j} = |\mathbf{r}_{i,j}|$ — модули векторов $\mathbf{r}_{i,j}$; \mathbf{r}_b — радиус-вектор центра масс ДЗ; $\mathbf{r}_{b,i}$ — радиус-векторы звезд m_i в неравномерно вращающейся системе координат ξ, η, ζ с началом в центре масс ДЗ (буква B на рис. 1); $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$ — угловая скорость вращения центра масс ДЗ относительно центра масс системы трех тел, t — время. Координаты x, y, z образуют неподвижную инерциальную систему отсчета. Траектории движения центров масс всех трех тел системы лежат в плоскости (x, y) . Оси z и ζ перпендикулярны плоскости (x, y) .

Для оценки приливных расстояний между компонентами ДЗ в работе Danilov (2021b) в качестве первого приближения рассмотрена модель однородного по плотности скопления, аппроксимирующая центральные области Плеяд. Масса m_3 и радиус a такого шара-скопления были приняты равными $m_3 \simeq 411M_\odot$ и $a = 3.5$ пк (Danilov 2021a; b, Danilov and Seleznev 2020). Масса m_3 соответствует общей массе 395 звезд Плеяд с величинами $m_G \leq 15^m$ (в случае выборки II звезд-членов скопления Плеяды, расположенных на угловых расстояниях d от центра скопления $d \leq 2.5$, которая была получена и исследована в работе Danilov and Seleznev (2020) при использовании данных Gaia DR2 (Brown et al. 2018, Prusti et al. 2016)). Для этой выборки звезд Плеяд средняя масса одиночной звезды в работе Danilov and Seleznev (2020) была получена равной $\bar{m} = 1.04 \pm 0.21M_\odot$. Как и в работе Danilov (2021b), рассмотрим ДЗ с $m_1 = 1.246M_\odot$, $m_2 = 0.834M_\odot$, $m_b = m_1 + m_2 = 2\bar{m} = 2.08M_\odot$, где $m_2/m_1 \simeq 0.67$. Движение центра масс ДЗ и однородного шара-скопления определяется системой уравнений (5) из работы Danilov (2021b). Интеграл энергии E_b движения центра масс ДЗ с использованием этой системы уравнений получен в работе Danilov (2021b). В полярных координатах (r_b, θ) он принимает вид:

$$E_b = m_b [\dot{r}_b^2 + r_b^2 \dot{\theta}^2 + \gamma(M/m_3)r_b^2] / 2 = const > 0, \quad (1)$$

где $\gamma = Gm_3/a^3$, $M = m_b + m_3$, G — гравитационная постоянная. Интеграл углового момента L_b движения центра масс ДЗ в этих координатах для системы (5) из Danilov (2021b) принимает стандартный вид: $L_b = m_b r_b^2 \dot{\theta} = const$ (см., например, уравнение (14.2) из работы Landau and Lifshits (1988)). Согласно уравнению (5) из статьи Danilov (2021b),

$$\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_3 = (M/m_3)\mathbf{r}_b = \mathbf{r}_{3,b}.$$

Для учета вклада потенциала в центре однородного шара-скопления в E_b и в потенциальную энергию $U(r_{3,b})$ системы двух тел m_3 и m_b , необходимо добавить к E_b величину $e_0 = -1.5\gamma a^2 m_b = const < 0$ (в этом случае интересные нас орбиты центра масс ДЗ в системе формируются при отрицательных значениях E_b , а при $E_b - e_0 = const$ и фиксированном значении L_b такая добавка e_0 к E_b влияет лишь на соотношение между E_b и L_b , но не на орбиту центра масс ДЗ в системе (см. ниже)). Следуя Landau and Lifshits (1988), подставим $\dot{\theta} = L_b/(m_b r_b^2)$ и e_0 в (1), получим уравнение для \dot{r}_b :

$$\dot{r}_b = \pm \sqrt{\frac{2E_b}{m_b} - \frac{L_b^2}{m_b^2 r_b^2} - \gamma \frac{M}{m_3} r_b^2 + 3\gamma a^2}. \quad (2)$$

Подставляя $\dot{r}_b = 0$ в (2), получим уравнение для нахождения расстояний r_b от центра масс системы трех тел в точках перигенцентра (r_{\min}) и апоцентра (r_{\max}) орбиты центра масс ДЗ. Выполняя преобразование уравнения (2), аналогичные указанным в (14.6), (14.7) Landau and Lifshits (1988), получим формулы для вычисления орбиты центра масс ДЗ в системе:

$$t = \int_{r_{\min}}^{r_b} \frac{dr}{F(r)}, \quad (3)$$

$$\theta = \int_{r_{\min}}^{r_b} \frac{L_b dr}{r^2 F(r)} + \pi/4, \quad (4)$$

где $F(r) = \sqrt{\frac{2E_b}{m_b} - \frac{L_b^2}{m_b^2 r^2} - \gamma \frac{M}{m_3} r^2 + 3\gamma a^2}$, а постоянное слагаемое $\pi/4$ в правой части (4) используется для получения орбиты центра масс ДЗ в виде, указанном на рис. 2а. Каноническая форма уравнений эллипсов орбит, указанных на рис. 2а, может быть получена из аналитического решения уравнения (4) (см., например, интеграл 380.119 в работе Dwight (1961), а также Landau and Lifshits (1988)). Периоды обеих орбит на рис. 2а равны $P_{\text{orb}} \simeq 30.06$ млн лет, т.к. используется потенциал однородного шара-скопления (см. Binney and Tremaine (2008), с. 147)). Оценки угловых моментов движения центра масс ДЗ $L_b = m_b r_b V_t$ получены согласно данным о тангенциальных скоростях $V_t = r_b \omega$ движения звезд скопления Плеяды в его картинной плоскости на расстоянии $d = r_b$ от центра скопления (см. рис. 9а, Danilov and Seleznev (2020)). Для орбиты с $L_b = 1.56 M_\odot$ пк² млн лет⁻¹ и $E_b = -1.3 M_\odot$ пк² млн лет⁻² использовались значения $d = 3$ пк, $V_t = 0.25$ пк млн лет⁻¹

(в этом случае, согласно (2), при $\dot{r}_b = 0$ находим $r_{\min} \simeq 1.503$ пк и $r_{\max} \simeq 2.387$ пк). Для орбиты с $L_b = 0.936 M_\odot \text{ пк}^2 \text{ млн лет}^{-1}$ и $E_b = -1.1 M_\odot \text{ пк}^2 \text{ млн лет}^{-2}$ использовались значения $d = 1.8$ пк, $V_t = 0.25$ пк млн лет $^{-1}$ (в этом случае $r_{\min} \simeq 0.622$ пк и $r_{\max} \simeq 3.460$ пк).

Для оценки приливных расстояний между компонентами ДЗ, движущейся в поле однородного по плотности скопления, рассмотрим уравнения движения звезд с массами m_1 и m_2 в суммарном поле сил трех гравитирующих тел m_j ($j = 1, 2, 3$) в системе координат ξ, η, ζ . Координаты x, y, z и ξ, η, ζ связаны между собой известными соотношениями (5.502) из (Chandrasekhar 1942), в которых R_0 нужно заменить на r_b , а начало координат системы (x, y, z) перенести в центр масс системы трех тел для вычислений в рамках рассматриваемой здесь задачи. Повторяя указанные в (5.507)–(5.511) (Chandrasekhar 1942) вычисления при $\dot{\omega} \neq 0$ для движения звезд-компонентов ДЗ в системе координат (ξ, η, ζ) , находим:

$$\begin{cases} m_i(\ddot{\xi}_i + \ddot{r}_b - 2\omega\dot{\eta}_i - \dot{\omega}\eta_i - \omega^2(r_b + \xi_i)) \\ = -\frac{Gm_1m_2}{r_{1,2}^3}(\xi_i - \xi_j) - \gamma m_i(\xi_i - \xi_3), \\ m_i(\ddot{\eta}_i + 2\omega(\dot{r}_b + \dot{\xi}_i) - \omega^2\eta_i + \dot{\omega}(r_b + \xi_i)) \\ = -\frac{Gm_1m_2}{r_{1,2}^3}(\eta_i - \eta_j) - \gamma m_i(\eta_i - \eta_3), \\ m_i\ddot{\zeta}_i = -\frac{Gm_1m_2}{r_{1,2}^3}(\zeta_i - \zeta_j) - \gamma m_i(\zeta_i - \zeta_3), \end{cases} \quad (5)$$

где $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, $\dot{\xi}_i = \frac{d\xi_i}{dt}$, $\ddot{\xi}_i = \frac{d^2\xi_i}{dt^2}$. Учитывая $\sum_{i=1}^2 m_i \xi_i = \sum_{i=1}^2 m_i \eta_i = 0$ и полагая $\dot{\xi}_i = \dot{\eta}_i = \ddot{\xi}_i = \ddot{\eta}_i = 0$ ($i = 1, 2$) в (5) для движения звезд в плоскости (ξ, η) , находим:

$$-\xi_3 = \frac{\omega^2 r_b - \ddot{r}_b}{\gamma} = r_{3,b} = (M/m_3)r_b, \quad (6)$$

где последнее (из трех) равенство получено из уравнений (5) в (Danilov 2021b), описывающих в системе координат (x, y, z) (см. рис. 1) движение центра масс ДЗ в силовом поле шара-скопления, а $r_{3,b}$ — расстояние центра шара-скопления от центра масс ДЗ в момент времени t .

Обозначим $\mu_i = m_i/m_b$, $i = 1, 2$. Полагая $\dot{\xi}_i = \dot{\eta}_i = \ddot{\xi}_i = \ddot{\eta}_i = 0$ ($i = 1, 2$) и учитывая (6), из уравнений системы (5) находим соотношения для приливных расстояний $|\xi_{i,t}|$ звезд от центра масс ДЗ вдоль оси ξ :

$$|\xi_{i,t}|^3 = \frac{Gm_j\mu_j^2}{|\omega^2 - \gamma|},$$

где $i, j = 1, 2$, совпадающие с $|\xi_{i,t}|$ в Danilov (2022) для случая круговых орбит центра масс ДЗ в однородном по плотности сферическом скоплении при $\omega = const$ и $\omega^2 - \gamma > 0$. Отметим, что $\left| \frac{\xi_{2,t}}{\xi_{1,t}} \right| = \frac{m_1}{m_2}$, а приливное расстояние $|\xi_{c,1,2}|$ вдоль оси ξ между компонентами ДЗ $|\xi_{c,1,2}| = |\xi_{1,t}| + |\xi_{2,t}| = |\xi_{1,t}|/\mu_2$. Подставляя $\omega = L_b/(m_b r_b^2)$ в $|\xi_{c,1,2}|$, находим:

$$|\xi_{c,1,2}| = m_b r_b \left(\frac{Gr_b}{|L_b^2 - \gamma m_b^2 r_b^4|} \right)^{1/3}. \quad (7)$$

На рис. 2b показаны зависимости от r_b приливных расстояний $|\xi_{c,1,2}|$ между компонентами ДЗ, полученные согласно (7) для орбит центров масс ДЗ, приведенных на рис. 2a. В точках орбит с $r_b = (L_b^2/(\gamma m_b^2))^{1/4}$ величины $|\xi_{c,1,2}| = \infty$, что показано на рис. 2b вертикальными стрелками. В этих точках $\omega^2 = \gamma$. При движении ДЗ по орбите окрестности этих точек, в которых $|\xi_{c,1,2}| > a$, проходятся центром масс ДЗ достаточно быстро (время такого прохождения $\tau \simeq 0.026$ млн лет для траектории с $E_b = -1.3 M_\odot \text{ пк}^2 \text{ млн лет}^{-2}$ и $\tau \simeq 0.006$ млн лет в случае $E_b = -1.1 M_\odot \text{ пк}^2 \text{ млн лет}^{-2}$; $\tau \ll P_{\text{orb}}$). Влияние таких прохождений на устойчивость ДЗ в поле скопления достаточно мало, и вероятность наблюдения ДЗ в такой окрестности тоже мала.

Обозначим $L_{1,2} = \sum_{i=1}^2 m_i(\eta_i \dot{\xi}_i - \xi_i \dot{\eta}_i)$. Согласно рис. 1, $\mathbf{r}_{b,i} = (\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$. Вычисляя интегралы углового момента и энергии $E_{1,2}$ движения звезд в системе координат (ξ, η, ζ) , используя систему уравнений (5), а также учитывая соотношения $\sum_{i=1}^2 m_i \mathbf{r}_{b,i} = \mathbf{0}$, находим:

$$\begin{cases} L_{1,2} - \omega \sum_{i=1}^2 m_i(\xi_i^2 + \eta_i^2) = const, \\ E_{1,2} = \sum_{i=1}^2 \frac{m_i}{2} [v_i^2 + \gamma r_{b,i}^2 - \omega^2(\xi_i^2 + \eta_i^2)] \\ - \frac{Gm_1m_2}{r_{1,2}} = const, \end{cases} \quad (8)$$

где $v_i^2 = \dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2$, $r_{b,i}^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2$. Подставляя $v_i^2 = 0$ в $E_{1,2}$ и учитывая $\sum_{i=1}^2 m_i \mathbf{r}_{b,i} = \mathbf{0}$, можно получить уравнение поверхности нулевых скоростей для компонентов ДЗ. Подставим $v_i^2 = 0$, $\xi_i = \xi_{i,t}$, $\eta_i = \zeta_i = 0$ ($i = 1, 2$) в $E_{1,2}$ (в этом случае каждая звезда-компонент ДЗ находится на поверхности нулевых скоростей в соответствующей ей особой точке равновесия на оси ξ). После использования условия $\sum_{i=1}^2 m_i \xi_i = 0$ и несложных

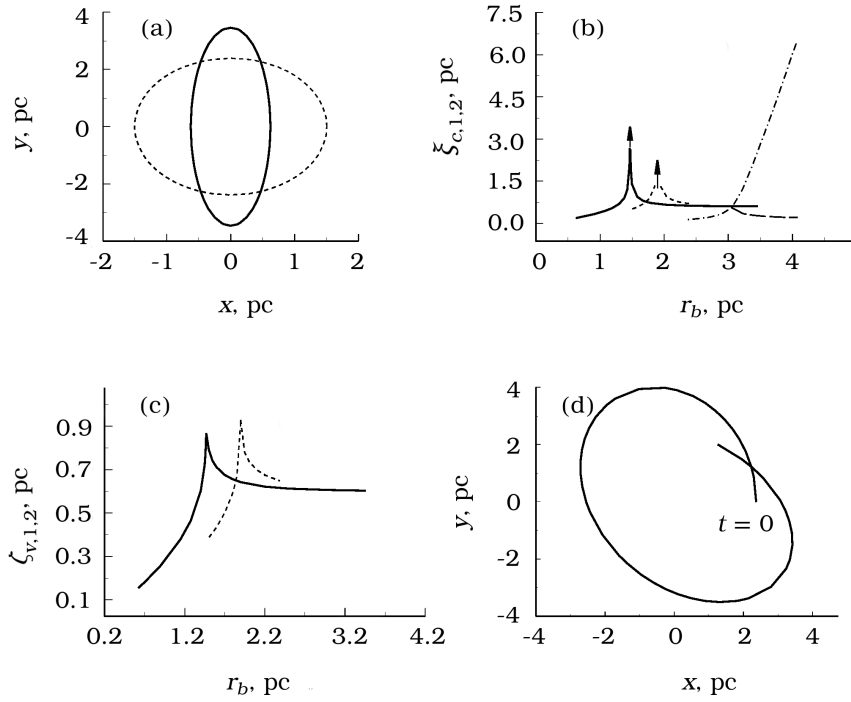


Рис. 2. (a) — две орбиты движущегося в однородном по плотности скоплении центра масс ДЗ с $E_b = -1.3M_\odot \text{ пк}^2 \text{ млн лет}^{-2}$, $L_b = 1.56 M_\odot \text{ пк}^2 \text{ млн лет}^{-1}$ (штриховая линия) и $E_b = -1.1 M_\odot \text{ пк}^2 \text{ млн лет}^{-2}$, $L_b = 0.936 M_\odot \text{ пк}^2 \text{ млн лет}^{-1}$ (сплошная линия). (b) — зависимости от r_b приливных расстояний $|\xi_{c,1,2}|$ между компонентами ДЗ. Две кривые с вертикальными стрелками, показанные штриховой и сплошной линиями, соответствуют штриховой и сплошной линиям орбит центра масс ДЗ на рис. 2а. Штрих-пунктирная кривая и кривая с длинными штрихами соответствует центру масс ДЗ, движущемуся по незамкнутой траектории в неоднородном по плотности скоплении. (c) — зависимости от r_b приливных расстояний $|\zeta_{v,1,2}|$ между компонентами ДЗ. Кривые, показанные штриховой и сплошной линиями, соответствуют штриховой и сплошной линиям орбит центра масс ДЗ на рис. 2а. (d) — траектория движущегося в неоднородном по плотности скоплении центра масс ДЗ с $E_b = 2.0M_\odot \text{ пк}^2 \text{ млн лет}^{-2}$, $L_b = 4.368 M_\odot \text{ пк}^2 \text{ млн лет}^{-1}$.

преобразований, получим:

$$E_{1,2} = m \left(\frac{\gamma - \omega^2}{2} \xi_{c,1,2}^2 - \frac{Gm_b}{|\xi_{c,1,2}|} \right) = \epsilon_{c,1,2} = \text{const},$$

где $m = \frac{m_1 m_2}{m_b}$ — приведенная масса (см., например, (13.4) в работе Landau and Lifshits (1988)). Определим размеры $|\eta_{v,1,2}|$ и $|\zeta_{v,1,2}|$ области под поверхностью нулевых скоростей вдоль осей η и ζ . Подставим $E_{1,2} = \epsilon_{c,1,2}$ и $v_i = \xi_i = \zeta_i = 0$ ($i = 1, 2$) в формулу для $E_{1,2}$ из (8). Получим уравнение для $|\eta_{v,1,2}|$:

$$\epsilon_{c,1,2} = m \left(\frac{\gamma - \omega^2}{2} \eta_{v,1,2}^2 - \frac{Gm_b}{|\eta_{v,1,2}|} \right). \quad (9)$$

Аналогично в случае $E_{1,2} = \epsilon_{c,1,2}$ и $v_i = \xi_i = \eta_i = 0$ ($i = 1, 2$), находим:

$$\epsilon_{c,1,2} = m \left(\frac{\gamma}{2} \zeta_{v,1,2}^2 - \frac{Gm_b}{|\zeta_{v,1,2}|} \right). \quad (10)$$

Уравнения (9) и (10) для величин $|\eta_{v,1,2}|$ и $|\zeta_{v,1,2}|$ являются кубическими алгебраическими. Положительные действительные корни этих уравнений определяют размеры области под поверхностью нулевых скоростей компонентов ДЗ вдоль осей η и ζ . Так как выражение для $\epsilon_{c,1,2}$ и уравнение (9) различаются лишь входящими в них величинами $|\xi_{c,1,2}|$ и $|\eta_{v,1,2}|$ (см. выше), то один из корней уравнения (9) равен $|\eta_{v,1,2}|_1 = |\xi_{c,1,2}|$. Второй положительный корень уравнения (9) легко определяется из уравнения (9) и при рассмотренных здесь параметрах скопления, ДЗ и ее орбиты равен $|\eta_{v,1,2}|_2 \simeq 1.5952 |\xi_{c,1,2}|$ (третий корень уравнения (9) отрицательный). Корень $|\eta_{v,1,2}|_2 \simeq 1.5952 |\xi_{c,1,2}|$ имеет место при $\omega^2 \geq \gamma$ (в области значений $r_b \in (r_{\min}; r_{b,\gamma})$, где $r_{b,\gamma} = (L_b^2 / (\gamma m_b^2))^{1/4}$ соответствует условию $\omega^2 = \gamma$). При $\omega^2 < \gamma$ положительный корень $|\eta_{v,1,2}|_2$ уравнения (9) отсутствует. Единственный положительный корень уравнения (10) удовлетворяет условию $|\zeta_{v,1,2}| < |\xi_{c,1,2}|$

при $r_b \in [r_{\min}; r_{b,\gamma}]$ и ограничен по величине при $r_b = r_{b,\gamma}$ (см. рис. 2с). Величины $|\xi_{c,1,2}|$ и $|\zeta_{v,1,2}|$ в перифериях рассмотренных орбит меньше, чем в их апоцентрах (см. рис. 2б, с).

Таким образом, размеры области под внутренней поверхностью нулевых скоростей компонентов ДЗ вдоль осей ξ и η совпадают между собой, но при $r_b \in [r_{\min}, r_{b,\gamma})$ для ДЗ существует еще одна (внешняя) поверхность нулевых скоростей с $|\eta_{v,1,2}|_2 \simeq 1.5952 |\xi_{c,1,2}|$, незамкнутая и расширяющаяся при увеличении r_b (см. рис. 2б). Согласно работам Angeletti et al. (1983), Angeletti and Giannone (1983), Jefferys (1976), Keenan (1981a; b), Keenan et al. (1973), во внешних областях скоплений, движущихся во внешнем силовом поле Галактики, в большей степени устойчивы траектории звезд с обратным движением в скоплении, движущемся в прямом направлении в Галактике. Поэтому во внешней области между двумя поверхностями нулевых скоростей компонентов ДЗ могут быть более устойчивы движения звезд, обратные в сравнении с прямым движением центра масс ДЗ. При наличии внешних возмущений ДЗ в результате колебаний регулярного поля скопления компоненты ДЗ могут выходить за пределы внутренней поверхности нулевых скоростей и временно удерживаться вблизи центра масс ДЗ до ее расстояний $r_b = r_{b,\gamma}$ от центра скопления. Отметим, что в модели неоднородного по плотности скопления строение поверхностей нулевых скоростей звезд-компонентов ДЗ заметно усложняется (см. ниже).

Запишем величину $L_{1,2}$ из (8) в полярных координатах λ, φ . В этом случае $\xi = \lambda \cos(\varphi)$, $\eta = \lambda \sin(\varphi)$, а интеграл углового момента из (8) можно привести к виду:

$$(\dot{\varphi} + \omega) \sum_{i=1}^2 m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2) = const. \quad (11)$$

Полагая в (11) $\xi_i^2 = \xi_{i,t}^2$, $\eta_i^2 = \eta_{i,t}^2$, используя для $|\xi_{i,t}|$ и $|\eta_{i,t}|$ оценки, соответствующие расстояниям внутренней поверхности нулевых скоростей компонентов ДЗ от ее центра масс вдоль осей ξ и η , находим:

$$|\dot{\varphi}_\pi| > |\dot{\varphi}_a|, \quad \frac{|\dot{\varphi}_\pi|}{|\dot{\varphi}_a|} \leq \frac{\omega_\pi}{\omega_a}, \quad |\dot{\varphi}_\pi| \geq \omega_\pi, \quad |\dot{\varphi}_a| \geq \omega_a, \quad (12)$$

где индексами π и a помечены угловые скорости ($\dot{\varphi}$, ω) в периферии и апоцентре орбиты центра масс ДЗ соответственно, а знаки равенства соответствуют случаю $const = 0$ в (11). Соотношения (12) выполняются для каждой из орбит, приведенных на рис. 2а.

Интегралы энергии $E_{1,2,3}$ и углового момента $L_{z,1,2,3}$ движения относительно оси $z \uparrow \uparrow \zeta$ для рассматриваемой системы трех тел с массами m_i в неподвижной системе координат (x, y, z) известны и записаны в Danilov (2021b). Интегралы $E_{1,2,3}$ и углового момента $L_{\zeta,1,2,3}$ могут быть записаны и для движения масс m_i ($i = 1, 2, 3$) в неравномерно вращающейся системе координат ξ, η, ζ (см. раздел 3). В данном случае к полученным согласно (7) решениям для величины $|\xi_{c,1,2}|$ могут быть добавлены еще две в несколько раз большие величины $|\xi_{c,1,2}| = |\xi_{1,t}|/\mu_2$, полученные после добавления к уравнениям движения звезд уравнения движения центра скопления и записи этого уравнения для модели однородного шара-скопления. В этом случае сумма трех уравнений движения масс m_i по ξ -координате с равными нулю ускорениями и скоростями движения масс m_i приводит к соотношению $-\xi_3 = (\ddot{r}_b - \omega^2 r_b)M/(m_3 \omega^2)$, где $-\xi_3 = Mr_b/m_3$ (см. уравнение (6)), а равновесное решение $\xi_1 = \xi_{1,t}$ (и $|\xi_{c,1,2}|$) может быть получено из уравнений:

$$\xi_1^3 + \xi_1^2 \frac{r_b(M\gamma/m_3 - \omega^2)}{\gamma - \omega^2} \pm \frac{Gm_3\mu_2^2}{\gamma - \omega^2} = 0. \quad (13)$$

При $\omega^2 > \gamma$ знак «+» перед последним слагаемым в левой части (13) соответствует величинам $\xi_1 > 0$, а знак «-», — величинам $\xi_1 < 0$. При $\omega^2 < \gamma$ знак «+» перед последним слагаемым в левой части (13) соответствует величинам $\xi_1 < 0$, а знак «-» — величинам $\xi_1 > 0$. Корни $\xi_1 = \xi_{1,t}$ уравнений (13) при $\omega^2 \rightarrow \gamma$ приводят к $|\xi_{c,1,2}| \rightarrow \infty$. При $r_b = r_{\min}, r_{\max}$ величины $|\xi_{c,1,2}|$, полученные согласно (13), в 5.0–6.1 и в 11.7–16.2 раз больше, чем $|\xi_{c,1,2}|$, полученные согласно (7) и приведенные на рис. 2б для двух орбит ДЗ в поле однородного по плотности скопления. Величины $|\xi_{c,1,2}|$, полученные согласно (13), больше или значительно больше взаимных расстояний $r_{1,2}$ между компонентами широких ДЗ в Плеядах (Danilov 2021a; 2022). Это может быть одной из причин достаточно большого числа широких ДЗ, наблюдающихся в скоплениях Плеяды, Ясли и α Персея (Danilov 2021a, Deason and Kraus 2020).

3. ДВОЙНЫЕ ЗВЕЗДЫ В МОДЕЛИ НЕОДНОРОДНОГО СКОПЛЕНИЯ

Следуя работе Danilov (2021b), рассмотрим движение звезд в силовом поле неоднородного по плотности шара-скопления. В статье Danilov (2021b) была рассмотрена модель скопления с плотностью массы:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_n (R_c/r)^2, & a \geq r > R_c \\ \rho_n = const, & r \leq R_c, \end{cases} \quad (14)$$

где r — расстояние от центра скопления, R_c — радиус однородной центральной части шара-скопления с плотностью ρ_n , $a = 3.5$ пк — радиус однородного шара-скопления с плотностью ρ_0 , такой, что $m_3 = \frac{4}{3}\pi\rho_0 a^3$, где $m_3 = 411 M_\odot$ (см. выше, а также статью Danilov (2021b). Для описания этой модели скопления Плеяды в работах Danilov (2021b; 2022) введены параметры $Q = \rho_0/\rho_n < 1$, $\zeta_c = R_c/a < 1$. Следуя работам Danilov (2021b; 2022), примем $Q = 0.7$ и $\zeta_c = 0.6367$.

Движение центра масс ДЗ и неоднородного шара-скопления определяется системой уравнений (5) из работы Danilov (2021b), в которых $m_b = m_{1,2}$ и вместо постоянной величины γ используется коэффициент $\gamma_n(r) = \frac{\alpha}{r^3} + \frac{\beta}{r^2}$, где $\alpha = -m_3 \frac{2\zeta_c^3 G}{Q}$, $\beta = m_3 \frac{3\zeta_c^2 G}{aQ}$. С учетом принятых обозначений, согласно уравнениям (5) из Danilov (2021b), интегралы углового момента и энергии движения центра масс ДЗ в полярных координатах (r_b, θ) принимают вид:

$$\begin{cases} L_b = m_b r_b^2 \omega = const, \\ E_b = m_b \left[\frac{\dot{r}_b^2}{2} + \frac{L_b^2}{2m_b^2 r_b^2} - \frac{\alpha}{r_b} \left(\frac{m_3}{M} \right)^2 + \right. \\ \left. + \beta \left(\frac{m_3}{M} \right) \ln(r_b) - C_1 \frac{3\gamma a^2}{2} \right] = const, \end{cases} \quad (15)$$

где постоянная величина C_1 равна отношению потенциала в центре неоднородного скопления с массой $M_n(r_{cl}) > m_3$ к потенциалу в центре однородного скопления с массой m_3 .

Пусть r_{cl} — радиус неоднородного скопления с распределением плотности (14), массой $M_n(r_{cl})$ при $r_{cl} > a > R_c$. Как уже было отмечено в статье Danilov (2022), после замены величины a в (14) на r_{cl} , распределение плотности (14) может быть использовано для описания звездных скоплений больших масс и размеров, чем при $r_{cl} = a$. Для вычисления потенциала $\Phi_3(r)$ в центре неоднородного скопления, следуя Danilov (2021b; 2022), запишем:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_3(r)}{dr} &= -\frac{GM_n(r)}{r^2} \\ &= -\frac{4\pi G \rho_n R_c^3}{r^2} \left[1 + 3(r - R_c)/R_c \right], \end{aligned}$$

при $r \in [R_c, r_{cl}]$, $\frac{d\Phi_3(r)}{dr} = -\frac{4\pi\rho_n r}{3}$ при $r \in [0, R_c]$.

Интегрируя по r' величину $\frac{d\Phi_3(r')}{dr'}$, находим:

$$\int_0^{r_{cl}} \frac{d\Phi_3(r')}{dr'} dr' = \Phi_3(r_{cl}) - \Phi_3(0), \quad (16)$$

где $\Phi_3(r_{cl}) = \frac{GM_n(r_{cl})}{r_{cl}}$. Вычисляя интеграл в (16) как сумму интегралов от $\frac{d\Phi_3(r')}{dr'}$ в интервалах $r' \in [0, R_c]$ и $r' \in [R_c, r_{cl}]$, находим:

$$\Phi_3(0) = C_1 \frac{3\gamma a^2}{2}, \quad \text{где } C_1 = \frac{\zeta_c^2}{Q} \left[1 + 2 \ln \left(\frac{r_{cl}}{a\zeta_c} \right) \right]. \quad (17)$$

Для описания траектории движения центра масс ДЗ в интервале $r \in (R_c, r_{cl})$ в модели неоднородного скопления после преобразований, аналогичных выполненным в (2), согласно E_b из (14), получим:

$$\dot{r}_b = \pm \sqrt{\frac{2E_b}{m_b} - \frac{L_b^2}{m_b^2 r_b^2} + \frac{2\alpha}{r_b} \left(\frac{m_3}{M} \right)^2 + U_b}, \quad (18)$$

где $U_b = -2\beta \left(\frac{m_3}{M} \right) \ln(r_b) + C_1 3\gamma a^2$.

В соответствии с работой Danilov and Seleznev (2020), в случае выборки звезд-членов скопления с величинами $m_G \leq 18^m$, оценены величины радиуса r_{cl} , радиуса ядра и массы m_3 для скопления Плеяды: 26.3 ± 0.7 пк, 6.24 ± 0.7 пк, $855 \pm 104 M_\odot$ соответственно. Масса ядра скопления для этой выборки звезд в Danilov and Seleznev (2020) получена равной $665 \pm 71 M_\odot$. Согласно Danilov (2022), для модели скопления (14), аппроксимирующей распределение плотности в скоплении Плеяды при $Q = 0.7$ и $\zeta_c \simeq 0.6367$, значения $M_n(r_{cl}) = 665 M_\odot$ достигаются при $r_{cl} = 4.745$ пк, а значения $M_n(r_{cl}) = 855 M_\odot$, — при $r_{cl} = 5.677$ пк. Согласно (18), при указанных выше значениях Q и ζ_c , находим: $C_1 \simeq 1.394$ при $r_{cl} = 4.745$ пк и $C_1 \simeq 1.573$ при $r_{cl} = 5.677$ пк.

Обозначим $F_n(r) = |\dot{r}_b|$, где величина \dot{r}_b определена в (18). Подставим $F_n(r)$ вместо $F(r)$ в (3) и (4), полагая равным нулю постоянное второе слагаемое в правой части (4). Полученные в результате таких преобразований уравнения позволяют вычислить траекторию движения центра масс ДЗ в рассматриваемой модели неоднородного скопления. На рис. 2d приведен фрагмент такой траектории с параметрами: $E_b = 2.0 M_\odot$ пк² млн лет⁻², $C_1 = 1$, $L_b = 4.368 M_\odot$ пк² млн лет⁻¹. Отрицательные значения E_b для этой траектории достигаются при $C_1 > 2.2038$ или $r_{cl} > 9.0606$ пк (см. (15), (17)); величина L_b — соответствует оценкам

тангенциальных скоростей $V_t = 0.28$ пк млн лет $^{-1}$ движения звезд скопления Плеяды в его картинной плоскости на расстоянии $d = 7.5$ пк от центра скопления (см. рис. 9а, Danilov and Seleznev (2020)). В этом случае из уравнения (18) при $\dot{r}_b = 0$ численным методом Ньютона находим: $r_{\min} \simeq 2.3738$ пк и $r_{\max} \simeq 4.0797$ пк. Траектория движения центра масс ДЗ не замкнута (см., рис. 2d). Пусть T_r — радиальный период траектории (промежуток времени между двумя последовательными прохождениями центром масс ДЗ расстояния между r_{\min} и r_{\max}). Для траектории, приведенной на рис. 2d, $T_r \simeq 17.1592$ млн лет, $\theta/(2\pi) \simeq 0.5804 \simeq l/n$, где θ (в радианах) — угол поворота вектора \mathbf{r}_b за время T_r относительно центра масс системы ДЗ-скопление (см. рис. 1), l и n — целые числа (в случае замкнутости траектории, (Landau and Lifshits (1988), с. 48). В случае траектории, приведенной на рис. 2d, через $n = 100$ периодов T_r после момента $t = 0$ вектор \mathbf{r}_b , сделав $l = 58$ полных оборотов, очень близко подойдет к своему первоначальному положению (Landau and Lifshits 1988), но не совпадет с ним. Отметим, что каноническая форма траекторий ДЗ в рассматриваемой модели неоднородного скопления при $r \in (R_c, r_{cl})$ — явление редкое, т.к. рациональных величин $\theta/(2\pi)$ всегда намного меньше, чем иррациональных.

На рис. 3а приведен фрагмент траектории движения центра масс ДЗ с параметрами $E_b = 2.75 M_\odot$ пк 2 млн лет $^{-2}$, $C_1 = 1$, $L_b = 5.98 M_\odot$ пк 2 млн лет $^{-1}$, $r_{\min} \simeq 2.3360$ пк, $r_{\max} \simeq 7.6408$ пк, $T_r \simeq 25.4863$ млн лет, $\theta/(2\pi) \simeq 0.5996 \simeq l/n$, $l = 6$, $n = 10$ в рассматриваемой модели неоднородного скопления. Траектория центра масс ДЗ на рис. 3а так же, как и на рис. 2d, не замкнута, в случае большого числа оборотов имеет вид розетки и при увеличении t постепенно заполняет в плоскости (x, y) кольцевую область между двумя окружностями с центром в точке $x = 0, y = 0$ и радиусами r_{\min} и r_{\max} (Landau and Lifshits 1988).

Пусть $L_{\zeta,1,2,3}$ — интеграл углового момента движения рассматриваемой системы трех тел и ДЗ относительно оси ζ . Для вычисления интегралов $L_{\zeta,1,2,3}$ и энергии $E_{1,2,3}$ системы трех тел с массами m_i ($i = 1, 2, 3$), а также для оценки приливных расстояний между компонентами ДЗ, движущейся в поле неоднородного скопления, рассмотрим уравнения движения трех тел системы в неравномерно вращающейся системе координат (ξ, η, ζ) (см. рис. 1). Повторяя выполненные в (5) вычисления,

для такой задачи, находим:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_i(\ddot{\xi}_i + \ddot{r}_b - 2\omega\dot{\eta}_i - \dot{\omega}\eta_i - \omega^2(r_b + \xi_i)) \\ = -\frac{Gm_1m_2}{r_{1,2}^3}(\xi_i - \xi_j) - \gamma_n(r_{i,3})m_i(\xi_i - \xi_3), \\ m_i(\ddot{\eta}_i + 2\omega(\dot{r}_b + \dot{\xi}_i) - \omega^2\eta_i + \dot{\omega}(r_b + \xi_i)) \\ = -\frac{Gm_1m_2}{r_{1,2}^3}(\eta_i - \eta_j) - \gamma_n(r_{i,3})m_i(\eta_i - \eta_3), \\ m_i\ddot{\zeta}_i = -\frac{Gm_1m_2}{r_{1,2}^3}(\zeta_i - \zeta_j) - \gamma_n(r_{i,3})m_i(\zeta_i - \zeta_3), \\ m_3(\ddot{\xi}_3 + \ddot{r}_b - 2\omega\dot{\eta}_3 - \dot{\omega}\eta_3 - \omega^2(r_b + \xi_3)) \\ = -\gamma_n(r_{1,3})m_1(\xi_3 - \xi_1) - \gamma_n(r_{2,3})m_2(\xi_3 - \xi_2), \\ m_3(\ddot{\eta}_3 + 2\omega(\dot{r}_b + \dot{\xi}_3) - \omega^2\eta_3 + \dot{\omega}(r_b + \xi_3)) \\ = -\gamma_n(r_{1,3})m_1(\eta_3 - \eta_1) - \gamma_n(r_{2,3})m_2(\eta_3 - \eta_2), \\ m_3\ddot{\zeta}_3 = -\gamma_n(r_{1,3})m_1(\zeta_3 - \zeta_1) \\ - \gamma_n(r_{2,3})m_2(\zeta_3 - \zeta_2), \end{array} \right. \quad (19)$$

где $i, j = 1, 2, i \neq j$. Уравнения движения центра скопления с массой m_3 имеют такой же вид, как при $i = 1, 2$, но правые части уравнений учитывают силу притяжения каждой звезды скоплением.

Сумма трех уравнений движения масс m_i системы (19) по ξ -координате с равными нулю ускорениями и скоростями движения масс m_i приводит к соотношению: $\ddot{r}_b - \omega^2r_b = \omega^2\xi_3m_3/M$ (как и для однородного скопления при использовании трех уравнений движения тел системы по ξ -координате (см. выше)). Рассмотрим случай, при котором все три тела с массами m_i находятся на оси ξ . Пусть звезда с массой m_1 на этой оси находится в особой точке равновесия. В этом случае $\ddot{\xi}_1 = \dot{\eta}_1 = \eta_1 = 0$ и для приливного расстояния $\xi_1 = \xi_{1,t}$ этой звезды от центра масс ДЗ, согласно первому уравнению в (19), находим:

$$\begin{aligned} & -\omega^2\left(\xi_1 - \frac{m_3}{M}\xi_3\right) + \left(\frac{\alpha}{r_{1,3}^3} + \frac{\beta}{r_{1,3}^2}\right)(\xi_1 - \xi_3) \\ & + \frac{Gm_2\xi_1}{\mu_2r_{1,2}^3} = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где $r_{1,2} = |\xi_1|/\mu_2$, $\xi_3 = -Mr_b/m_3$ (см. (6), $r_{1,3} = |\xi_1 - \xi_3|$, величины $\gamma_n(r)$, α , β определены выше. Умножая уравнение (20) на $(r_{1,2}r_{1,3}\mu_2)^3$, получим уравнение $f(\xi_1) = \xi_1 h(\xi_1) = 0$ для нахождения величины $\xi_1 = \xi_{1,t}$, где $h(\xi_1)$ — многочлен шестой степени относительно ξ_1 . Решение уравнения (20) в данной работе получено численно

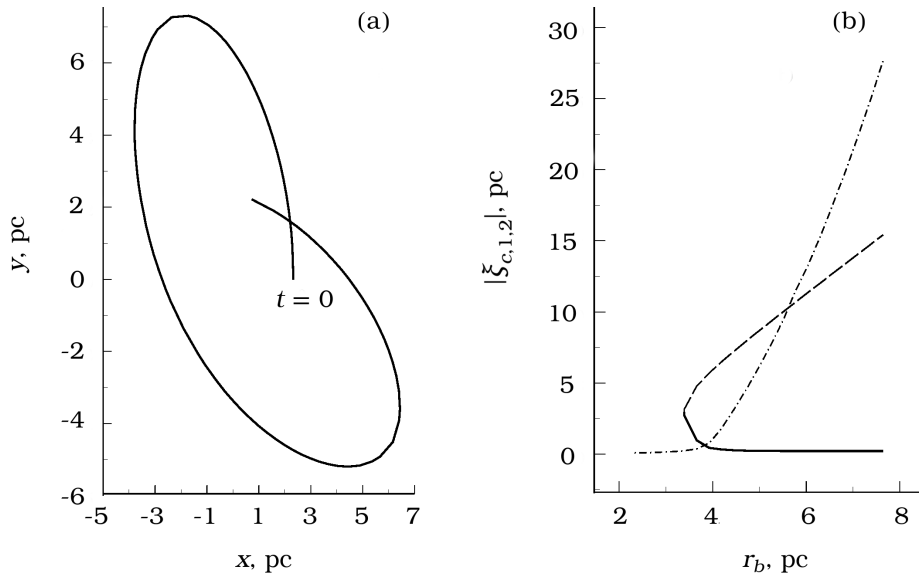


Рис. 3. (а) — фрагмент траектории движения центра масс ДЗ с $E_b = 2.75 M_\odot \text{ пк}^2 \text{ млн лет}^{-2}$, $L_b = 5.98 M_\odot \text{ пк}^2 \text{ млн лет}^{-1}$ в модели неоднородного скопления (14); (б) — зависимости от r_b приливных расстояний между компонентами ДЗ с траекторией движения центра масс, указанной на рис. 3а.

методом Ньютона. Для рассмотренных в данной работе траекторий центра масс ДЗ количество действительных ненулевых корней уравнения (20) возрастает от двух при $r_b = r_{\min}$ до шести при $r_b = r_{\max}$ (наибольшие оценки величин $|\xi_{1,t}|$ также возрастают с увеличением r_b). Так как расстояния $r_{1,2}$ между компонентами широких ДЗ, наблюдаемых в Плеядах, не превышают $r_{1,2} \simeq 1.8 \text{ пк}$ (Danilov 2021a), представляет интерес рассматривать оценки величин $|\xi_{c,1,2}| = |\xi_{1,t}|/\mu_2$, не превышающие $r_{1,2} \simeq 1.8 \text{ пк}$ значительно.

На рис. 2b штрих-пунктирной кривой и кривой с длинными штрихами приведены зависимости от r_b величин $|\xi_{c,1,2}|$ для двух действительных ненулевых корней $\xi_{1,t}$ уравнения (20), полученных для траектории движения центра масс ДЗ в неоднородном скоплении (см. рис. 2d). Согласно рис. 2b и рис. 5а, учет неоднородности скопления приводит к отсутствию оценок $|\xi_{c,1,2}| \rightarrow \infty$ при $\omega^2 \rightarrow \gamma$, а наибольшие значения $|\xi_{c,1,2}| \simeq 6.517 \text{ пк}$ для бóльшего из приведенных на рис. 2b значений $|\xi_{c,1,2}|$ достигаются в апоцентре траектории центра масс ДЗ при $r_b = r_{\max}$. В области значений $r_b > r_{b,\gamma}$ (при $\omega^2 < \gamma$) наблюдаются два решения для $|\xi_{c,1,2}|$, соответствующие значениям $\xi_{1,t} > 0$ и $\xi_{1,t} < 0$ (см. две сплошные линии на рис. 5а). В точке $r_b = r_{b,\gamma}$, при переходе от $\omega^2 > \gamma$ к $\omega^2 < \gamma$, формируется решение $\xi_{1,t} < 0$ уравнения

(20), соответствующее противоположной ориентации вектора $\mathbf{r}_{1,2}$ по сравнению с его ориентацией до выше указанного перехода. Учитывая результаты работ Angeletti et al. (1983), Angeletti and Giannone (1983), Jefferys (1976), Keenan (1981a; b), Keenan et al. (1973), отметим, что при $r_b \geq r_{b,\gamma}$ в окрестностях центра масс ДЗ в области значений $|\xi_{1,2}| \leq |\xi_{c,1,2}|_{\min}$ возможно формирование области с прямым движением компонентов ДЗ, в которой $\dot{\varphi} > 0$, где $|\xi_{c,1,2}|_{\min}$ — меньшее из двух рассмотренных на рис. 2b значений $|\xi_{c,1,2}|$ для траектории центра масс ДЗ, приведенной на рис. 2d. Отметим, что наибольшие значения $|\xi_{c,1,2}|$ и размеры области значений $|\xi_{c,1,2}|$ (и $\dot{\varphi} < 0$), расположенной между двумя решениями $|\xi_{c,1,2}|$ при $r_b > r_{b,\gamma}$, возрастают с увеличением r_b и убывают с уменьшением r_b при движении ДЗ по своей траектории (см. рис. 2b). Поэтому компоненты широких ДЗ удаляются друг от друга или сближаются между собой вдоль оси ξ при соответствующем движении ДЗ по траектории. Это вполне согласуется с регрессионной зависимостью расстояний $r_{i,j}$ между компонентами широких ДЗ от их расстояний r_i до центра скопления в Плеядах, полученной в работе Danilov (2021a) по данным Gaia DR2 (Brown et al. 2018, Prusti et al. 2016) (см. рис. 2b из Danilov (2021a)). Расположение точек, изображающих компоненты ДЗ в плоскости $(r_i, r_{i,j})$ вдоль этой зависимости, указывает на доминиру-

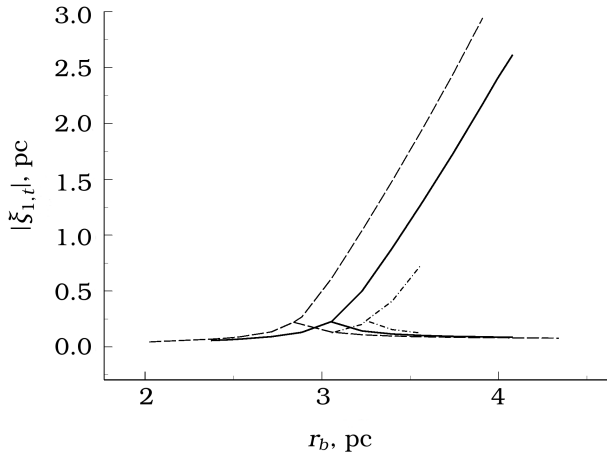


Рис. 4. Зависимости величин $|\xi_{1,t}|$ от r_b (при $L_b = 4.368 M_\odot \text{ пк}^2 \text{ млн лет}^{-1}$ — см. сплошные линии, полученные для траектории центра масс ДЗ, приведенной на рис. 2d; в случае $L_b = 4.7905 M_\odot \text{ пк}^2 \text{ млн лет}^{-1}$ — см. штрих-пунктирные линии, а при $L_b = 3.9455 M_\odot \text{ пк}^2 \text{ млн лет}^{-1}$ — штриховые линии). Отклонение штриховых и штрих-пунктирных линий от сплошных линий вдоль координатных осей обусловлено влиянием погрешностей δV_t и δr_b на величины $|\xi_{1,t}|$.

ющую линию движения центров масс ДЗ в этой плоскости в результате их движений вдоль своих траекторий в скоплении.

Для оценки влияния на величины $\xi_{c,1,2}$, $\xi_{1,t}$ погрешностей величин V_t , r_b , полученных по данным наблюдений, воспользуемся уравнением (18). Пусть $\dot{r}_b = 0$. В окрестностях точек апоцентра или перицентра орбиты центра масс ДЗ проварьируем возведенное в квадрат уравнение (18), считая переменными величины E_b , L_b и r_b . После несложных преобразований, получим:

$$\delta E_b = \frac{L_b \delta L_b}{m_b r_b^2} + \Xi \delta r_b,$$

где

$$\Xi = m_b \left[-\frac{L_b^2}{m_b^2 r_b^3} + \frac{\alpha}{r_b^2} \left(\frac{m_3}{M} \right)^2 + \frac{\beta}{r_b} \left(\frac{m_3}{M} \right) \right].$$

Варьируя величину $L_b = m_b r_b V_t$ по величинам r_b и V_t , находим:

$$\delta L_b = m_b (V_t \delta r_b + r_b \delta V_t)$$

и погрешности

$$\sigma_{L_b} = \pm m_b \sqrt{(V_t \delta r_b)^2 + (r_b \delta V_t)^2},$$

$$\sigma_{E_b} = \pm \sqrt{\left(\frac{L_b \delta L_b}{m_b r_b^2} \right)^2 + (\Xi \delta r_b)^2}$$

величин L_b и E_b соответственно. Для указанной на рис. 2d траектории центра масс ДЗ находим: $\sigma_{L_b} = \pm 0.423 M_\odot \text{ пк}^2 \text{ млн лет}^{-1}$ и $\sigma_{E_b} = \pm 0.159 M_\odot \text{ пк}^2 \text{ млн лет}^{-2}$. Эти величины погрешностей соответствуют оценкам $\delta V_t \simeq 0.027 \text{ пк млн лет}^{-1}$ и $\delta r_b \simeq 0.0577 \text{ пк}$, полученным в работе Danilov and Seleznev (2020, рис. 9a) при обсуждении тангенциальных скоростей движения звезд скопления Плеяды в его картинной плоскости на расстоянии $d = 7.5 \text{ пк}$ от центра скопления. Величина δr_b принята равной половине ширины интервала Δd , с которым получены и приведены оценки величин V_t в Danilov and Seleznev (2020, рис. 9a). Решения уравнения (18) при $\dot{r}_b = 0$ для траекторий центра масс ДЗ с $L_b = 4.368 \pm 0.423 M_\odot \text{ пк}^2 \text{ млн лет}^{-1}$ и $E_b = 2.0 M_\odot \text{ пк}^2 \text{ млн лет}^{-2}$ приводят к значениям $r_{\min} = 2.9826 \text{ пк}$ и $r_{\max} = 3.5587 \text{ пк}$ (для бóльшего значения L_b) и $r_{\min} = 2.0245 \text{ пк}$ и $r_{\max} = 4.3404 \text{ пк}$ (для мёньшего значения L_b). Модули решений уравнения (20) относительно $\xi_1 = \xi_{1,t}$ в зависимости от r_b для этих двух траекторий приведены на рис. 4 штриховыми и штрих-пунктирными линиями. Для сравнения между собой решений $\xi_{1,t}$, полученных с разными значениями L_b , на рис. 4 сплошными линиями приведены и зависимости от r_b величин $|\xi_{1,t}|$ для случая $L_b = 4.368 M_\odot \text{ пк}^2 \text{ млн лет}^{-1}$ и $E_b = 2.0 M_\odot \text{ пк}^2 \text{ млн лет}^{-2}$ (см. также на рис. 2b — линии штрих-пунктирные и с длинными штрихами). Согласно рис. 4, при увеличении погрешностей δV_t и δr_b приливное расстояние $|\xi_{c,1,2}| = |\xi_{1,t}|/\mu_2$ между компонентами ДЗ вдоль оси ξ уменьшается, область между верхним и нижним значениями $|\xi_{c,1,2}|$ сжимается (в основном, за счет уменьшения верхнего значения $|\xi_{c,1,2}|$) и сдвигается в сторону бóльших значений r_b ; координаты точки кривой с $L_b = 4.368 M_\odot \text{ пк}^2 \text{ млн лет}^{-1}$ в окрестностях точки совпадения ее верхнего и нижнего значений $|\xi_{1,t}|$ на рис. 4 можно записать в виде $(r_b, |\xi_{1,t}|) = (3.056_{-0.216}^{+0.194} \text{ пк}, 0.227_{-0.101}^{+0.388} \text{ пк})$. Изменение E_b на величину δE_b при фиксированном значении L_b приводит к сдвигам зависимостей $|\xi_{1,t}|$ от r_b вдоль осей координат $(r_b, |\xi_{1,t}|)$, подобным тем, что указаны на рис. 4 (т.к. при этом меняются величины r_{\min} и r_{\max} для орбиты центра масс ДЗ).

Для дальнейшего обсуждения полученных решений $|\xi_{c,1,2}|$ нам потребуются интегралы системы уравнений (19), которые можно записать в следую-

шем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_{\zeta,1,2,3} = \sum_{i=1}^3 m_i (\dot{\xi}_i \eta_i - \xi_i \dot{\eta}_i) \\ -\omega \left[\sum_{i=1}^3 m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2) + m_3 \xi_3 r_b \right] = const, \\ E_{1,2,3} = \left(\sum_{i=1}^3 m_i v_i^2 - M \dot{r}_b^2 \right) / 2 \\ -\omega^2 \left[\sum_{i=1}^3 m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2) - M r_b^2 \right] / 2 \\ + \sum_{i=1}^2 m_i \left(-\frac{\alpha}{r_{i,3}} + \beta \ln(r_{i,3}) \right) - \frac{G m_1 m_2}{r_{1,2}} \\ = const, \end{array} \right. \quad (21)$$

где $\eta_3 = \dot{\eta}_3 = 0$ (поэтому верхний предел в первой сумме по i для $L_{\zeta,1,2,3}$ можно писать равным 2); $\xi_3 = -r_b \left(\frac{M}{m_3} \right)$; величины v_i^2 определены в (8); при получении интеграла $E_{1,2,3}$ использовалось выражение для $L_{\zeta,1,2,3}$.

Пусть все тела рассматриваемой системы с массами m_i ($i = 1, 2, 3$) расположены на оси ξ , а $\xi_1 = \xi_{1,t}$ и $v_j = 0$ ($j = 1, 2$), $v_3^2 = \left(\frac{m_b}{m_3} \right)^2 (\dot{r}_b^2 + \omega^2 r_b^2)$, т.к. в полярной системе координат с началом в центре масс трех тел $v_b^2 = \dot{r}_b^2 + \omega^2 r_b^2$ ($v_b = |\mathbf{v}_b|$, где \mathbf{v}_b — вектор скорости движения центра масс ДЗ относительно центра масс трех тел; $m_b r_b = m_3 r_3$, где $r_3 = |\mathbf{r}_3|$, \mathbf{r}_3 — радиус-вектор центра скопления). В этом случае $\eta_j = \zeta_j = 0$ и $E_{1,2,3} = \epsilon_{c,1,2,3} = const$, где

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{c,1,2,3} = U_1 - \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{m_1 \xi_{1,t}^2}{\mu_2} + m_3 \xi_3^2 - M r_b^2 \right) \\ + U_2 + U_3 - \frac{G m_1 m_2 \mu_2}{|\xi_{1,t}|}, \\ U_1 = \frac{m_b^2}{2 m_3} \left[\dot{r}_b^2 \left(1 - \frac{m_3 M}{m_b^2} \right) \right], \\ U_2 = m_1 \left(\frac{-\alpha}{|\xi_{1,t} - \xi_3|} + \beta \ln(|\xi_{1,t} - \xi_3|) \right), \\ U_3 = m_2 \left(\frac{-\alpha}{|m_1 \xi_{1,t} / m_2 + \xi_3|} + \beta \ln \left(\left| \frac{m_1 \xi_{1,t}}{m_2} + \xi_3 \right| \right) \right). \end{array} \right. \quad (22)$$

При выводе формул (22) использовалось соотношение $\sum_{j=1}^2 m_j \xi_j = 0$.

В случае $v_j = 0$ ($j = 1, 2$) уравнение $E_{1,2,3} = const$ может быть приведено к уравнению поверхности нулевых скоростей (ПНС)

каждого из компонентов ДЗ в системе координат (ξ, η, ζ) . Определим размеры области под этой поверхностью вдоль осей η и ζ для звезды m_1 . Обозначим $\eta_1 = \eta_{v,1}$ величину η_1 в точке пересечения оси η при $\eta > 0$ и ПНС, соответствующей условию $E_{1,2,3} = \epsilon_{c,1,2,3}$. Полагая $v_j = 0$ ($j = 1, 2$), $\xi_j = \eta_j = 0$, $v_3^2 = \left(\frac{m_b}{m_3} \right)^2 (\dot{r}_b^2 + \omega^2 r_b^2)$ в $E_{1,2,3} = \epsilon_{c,1,2,3}$, находим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{c,1,2,3} = U_1 - \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{m_1 \eta_{v,1}^2}{\mu_2} + m_3 \xi_3^2 - M r_b^2 \right) \\ + V_2 + V_3 - \frac{G m_1 m_2 \mu_2}{|\eta_{v,1}|}, \\ V_2 = m_1 \left(\frac{-\alpha}{\sqrt{\eta_{v,1}^2 + \xi_3^2}} + \beta \ln \left(\sqrt{\eta_{v,1}^2 + \xi_3^2} \right) \right), \\ V_3 = m_2 \left(\frac{-\alpha}{\sqrt{\lambda_\eta^2 + \xi_3^2}} + \beta \ln \left(\sqrt{\lambda_\eta^2 + \xi_3^2} \right) \right), \\ \lambda_\eta = \frac{m_1 \eta_{v,1}}{m_2}, \end{array} \right. \quad (23)$$

где величина U_1 определена в (22) и использовалось соотношение $\sum_{j=1}^2 m_j \eta_j = 0$. Аналогичные вычисления для определения величины $\zeta_1 = \zeta_{v,1}$ в точке пересечения оси ζ и соответствующей величине $\xi_{1,t}$ ПНС при $v_j = 0$ ($j = 1, 2$), $\xi_j = \eta_j = 0$ и указанной выше величине v_3^2 , приводят к следующему уравнению:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{c,1,2,3} = U_1 - \frac{\omega^2}{2} (m_3 \xi_3^2 - M r_b^2) \\ + W_2 + W_3 - \frac{G m_1 m_2 \mu_2}{|\zeta_{v,1}|}, \\ W_2 = m_1 \left(\frac{-\alpha}{\sqrt{\zeta_{v,1}^2 + \xi_3^2}} + \beta \ln \left(\sqrt{\zeta_{v,1}^2 + \xi_3^2} \right) \right), \\ W_3 = m_2 \left(\frac{-\alpha}{\sqrt{\lambda_\zeta^2 + \xi_3^2}} + \beta \ln \left(\sqrt{\lambda_\zeta^2 + \xi_3^2} \right) \right), \\ \lambda_\zeta = \frac{m_1 \zeta_{v,1}}{m_2}, \end{array} \right. \quad (24)$$

где использовалось соотношение $\sum_{j=1}^2 m_j \zeta_j = 0$.

Решение уравнений (23), (24) при величине $\epsilon_{c,1,2,3}$, определенной в (22), было получено численно методом Ньютона для траектории центра масс ДЗ, приведенной на рис. 2d. Для этой траектории ДЗ получены и приведены на рис. 5 зависимости от

r_b величин $\xi_{1,t}$, $|\xi_{1,t}|$, $|\eta_{v,1}|$ и $|\zeta_{v,1}|$. Двумя сплошными линиями на рис. 5б представлены модули двух ближайших к $\eta_{v,1} = 0$ корней уравнения (23) при значениях $r_b < r_{b,\gamma}$ и $\xi_{1,t} > 0$, показанных на рис. 5а сплошной линией. Действительные корни уравнения (23) отсутствуют для значений $\xi_{1,t}$, изображенных штрих-пунктирной линией на рис. 5а. Верхняя и нижняя штриховые линии на рис. 5б при $r_b > r_{b,\gamma}$ получены при значениях $\xi_{1,t} < 0$, приведенных на рис. 5а сплошной и штриховой линиями соответственно.

Таким образом, вдоль оси η , направление которой близко к направлению движения центра масс ДЗ, определены два расстояния от него до ПНС. Меньшее из них удовлетворяет условию $s_\eta = |\eta_{v,1}|/|\xi_{1,t}| < 1$, где s_η с увеличением r_b убывает от $s_\eta \simeq 0.997$ при $r_b = r_{\min}$ до $s_\eta \simeq 0.668$ при $r_b = r_{b,\gamma}$, а затем возрастает до значений $s_\eta \simeq 0.997$ при $r_b = r_{\max}$. Большее значение s_η удовлетворяет условию $s_\eta > 1$, где s_η с увеличением r_b убывает от $s_\eta \simeq 8.773$ при $r_b = r_{\min}$ до $s_\eta \simeq 2.656$ при $r_b = r_{\max}$. Меньшие значения $|\eta_{v,1}|$ и близкие к ним значения $|\xi_{1,t}|$ характеризуют размеры области приливной устойчивости гравитационно-связанной ДЗ в силовом поле скопления в плоскости (ξ, η) . Большие значения $|\eta_{v,1}|$ соответствуют расстоянию от центра масс ДЗ до незамкнутой ПНС, экранирующей движение звезды m_1 вдоль оси η от центра масс ДЗ (см. ниже).

На рис. 5д приведены модули корней уравнения (24), полученных для двух ближайших к $\xi_{1,t} = 0$ корней уравнения $E_{1,2,3} = \epsilon_{c,1,2,3}$, где $\epsilon_{c,1,2,3}$ см. в (22), при $\xi_{1,t} > 0$ и $r_{\min} \leq r_b < r_{b,\gamma}$, а также при $\xi_{1,t} < 0$ и $r_{b,\gamma} < r_b \leq r_{\max}$, показанных на рис. 5д сплошной и штриховой линиями соответственно. Величина $s_\zeta = |\zeta_{v,1}|/|\xi_{1,t}| < 1$, где s_ζ с увеличением r_b убывает от $s_\zeta \simeq 0.978$ при $r_b = r_{\min}$ до $s_\zeta \simeq 0.601$ при $r_b = r_{b,\gamma}$, а затем возрастает до значений $s_\zeta \simeq 0.967$ при $r_b = r_{\max}$.

Для меньших (из двух) значений $|\eta_{v,1}|$ величины s_η больше s_ζ при одинаковых значениях r_b , что указывает на небольшое сжатие вдоль оси ζ области под ПНС для звезды m_1 .

Отметим, что интеграл энергии $E_{1,2,3}$ может быть использован для более детального рассмотрения области допустимых движений компонентов ДЗ при ее движении в скоплении. Если компоненты ДЗ находятся на ПНС в точках с координатами $\xi_j \neq 0$, $\eta_j \neq 0$, $\zeta_j = 0$, то $v_j^2 = 0$, $r_{j,3} = \sqrt{(\xi_j - \xi_3)^2 + \eta_j^2}$ ($j = 1, 2$), $r_{1,2} = r_1/\mu_2$, $r_1 = \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}$. Подставляя полученные соотношения в $E_{c,1,2,3} = \epsilon_{c,1,2,3}$, учитывая условие

$\sum_{j=1}^2 m_j \mathbf{r}_j = 0$, получим уравнение, связывающее между собой координаты ξ_1 и η_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{c,1,2,3} = U_1 - \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{m_1 r_1^2}{\mu_2} + m_3 \xi_3^2 - M r_b^2 \right) \\ + V_{\eta,2} + V_{\eta,3} - \frac{G m_1 m_2 \mu_2}{r_1}, \\ V_{\eta,2} = m_1 \left(\frac{-\alpha}{r_{1,3}} + \beta \ln(r_{1,3}) \right), \\ V_{\eta,3}/m_2 = \frac{-\alpha}{\sqrt{(\lambda_{\xi,1} + \xi_3)^2 + \lambda_{\eta,1}^2}} \\ + \beta \ln \left(\sqrt{(\lambda_{\xi,1} + \xi_3)^2 + \lambda_{\eta,1}^2} \right), \\ \lambda_{\xi,1} = \frac{m_1 \xi_1}{m_2}, \lambda_{\eta,1} = \frac{m_1 \eta_1}{m_2}. \end{array} \right. \quad (25)$$

Если компоненты ДЗ находятся на ПНС в точках с координатами $\xi_j \neq 0$, $\eta_j = 0$, $\zeta_j \neq 0$, то $v_j^2 = 0$, $r_{j,3} = \sqrt{(\xi_j - \xi_3)^2 + \zeta_j^2}$ ($j = 1, 2$), $r_{1,2} = r_1/\mu_2$, $r_1 = \sqrt{\xi_1^2 + \zeta_1^2}$. Вычисления, аналогичные выполненным в (25), приводят к следующему уравнению, связывающему между собой координаты ξ_1 и ζ_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{c,1,2,3} = U_1 - \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{m_1 \xi_1^2}{\mu_2} + m_3 \xi_3^2 - M r_b^2 \right) \\ + V_{\zeta,2} + V_{\zeta,3} - \frac{G m_1 m_2 \mu_2}{r_1}, \\ V_{\zeta,2} = m_1 \left(\frac{-\alpha}{r_{1,3}} + \beta \ln(r_{1,3}) \right), \\ V_{\zeta,3}/m_2 = \frac{-\alpha}{\sqrt{(\lambda_{\xi,1} + \xi_3)^2 + \lambda_{\zeta,1}^2}} \\ + \beta \ln \left(\sqrt{(\lambda_{\xi,1} + \xi_3)^2 + \lambda_{\zeta,1}^2} \right), \\ \lambda_{\xi,1} = \frac{m_1 \xi_1}{m_2}, \lambda_{\zeta,1} = \frac{m_1 \zeta_1}{m_2}. \end{array} \right. \quad (26)$$

После задания величины ξ_1 уравнения (25) и (26) решались численно методом Ньютона для нахождения величин $\eta_1 = \eta_{v,1}$ и $\zeta_1 = \zeta_{v,1}$ соответственно. Результаты вычислений приведены на рис. 6 для траектории центра масс ДЗ, приведенной на рис. 2д, при $r_b \simeq 2.8856$ пк $< r_{b,\gamma}$ и $r_b \simeq 3.2268$ пк $> r_{b,\gamma}$.

Согласно рис. 6а, б ПНС для звезды с массой m_1 имеет форму, близкую к сферической. С увеличением r_b размеры области под этой поверхностью возрастают (см. сплошные и штриховые линии с длинными штрихами на рис. 6а, б). При переходе центра масс ДЗ из области с $r_b < r_{b,\gamma}$ в

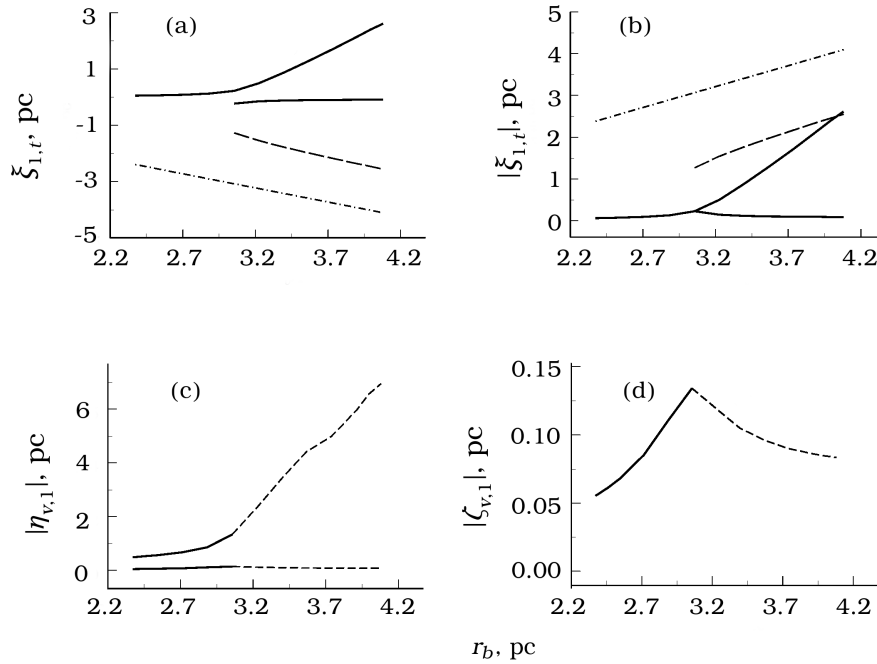


Рис. 5. (a), (b) — зависимости от r_b величин $\xi_{1,t}$, $|\xi_{1,t}|$, $|\eta_{v,1}|$ и $|\zeta_{v,1}|$, полученные для траектории центра масс ДЗ, приведенной на рис. 2d; величины $\xi_{1,t}$ и $|\xi_{1,t}|$ получены согласно (20), величины $|\eta_{v,1}|$ и $|\zeta_{v,1}|$ получены согласно (23), (24).

область $r_b > r_{b,\gamma}$ вместо одной ПНС на рис. 6а, б формируются три таких поверхности, под которыми находятся области разного размера, доступные для движения звезды m_1 . Учитывая результаты работ Angeletti et al. (1983), Angeletti and Giannone (1983), Jefferys (1976), Keenan (1981a; b), Keenan et al. (1973) о большей устойчивости обратных траекторий звезд моделей скоплений в регулярном силовом поле Галактики, можно предположить, что при $r_b < r_{b,\gamma}$ область движений компонентов ДЗ с $\dot{\varphi} < 0$ расположена под сплошной линией, а при $r_b > r_{b,\gamma}$ области с $\dot{\varphi} < 0$ расположены между двумя ПНС, показанными штриховыми линиями, и под ПНС, показанной штрих-пунктирной линией на рис. 6а, б. Вероятно, между этими двумя областями при $r_b > r_{b,\gamma}$ формируется одна область с $\dot{\varphi} > 0$, расположенная между линиями штрих-пунктирной и штриховой с короткими штрихами на рис. 6а, б.

Каждому из значений $\xi_{1,t}$ соответствуют два действительных корня $\eta_{v,1}$ уравнения (25) и один действительный корень $\zeta_{v,1}$ уравнения (26). Меньшие и большие значения $|\eta_{v,1}|$ использованы при построении рис. 6а и рис. 6с соответственно. Зависимости $|\eta_{v,1}|$ и $|\zeta_{v,1}|$ от $\xi_{v,1}$, соответствующие одному и тому же значению $\xi_{1,t}$, показаны на рис. 6а, б, с линиями одного вида.

При наличии колебаний регулярного поля скопления звезда с массой m_1 может выходить за пределы указанных на рис. 6а, б поверхностей. В этом случае звезда с массой m_2 движется в противоположном направлении (т.к. $\sum_{j=1}^2 m_i \mathbf{r}_j = \mathbf{0}$). Такие (более широкие) ДЗ остаются гравитационно связанными (или временно связанными) до значительно больших расстояний от центра масс ДЗ вдоль оси η , указанных соответствующими линиями на рис. 6с.

Отметим, что все полученные оценки величин $|\eta_{v,1}|$ близки к минимальным значениям при $\xi_{v,1} = \xi_m \simeq -0.5$ пк и $r_b \simeq 2.8856$ пк, а также при $\xi_{v,1} = \xi_m \in [-1.5, -1.3]$ пк и $r_b \simeq 3.2268$ пк. Величины $|\eta_{v,1}|$ возрастают как при уменьшении $\xi_{v,1} < \xi_m$, так и при увеличении $\xi_{v,1} > \xi_m$, в том числе и в окрестности $\xi_{v,1} = 0$ (см. рис. 6с). Существование в орбитальной плоскости центра масс ДЗ такой области ($|\eta_1| \leq |\eta_{v,1}|$, см. рис. 6с) с ограниченным движением ее компонентов вдоль оси η также является одной из причин формирования в Плеядах большого числа широких ДЗ с вектором $\mathbf{r}_{1,2}$, ориентированным в направлении, близком к перпендикулярному направлению на центр скопления (Danilov 2021b; 2022).

Пусть компоненты ДЗ расположены под соответствующими им ПНС. Для обсуждения со-

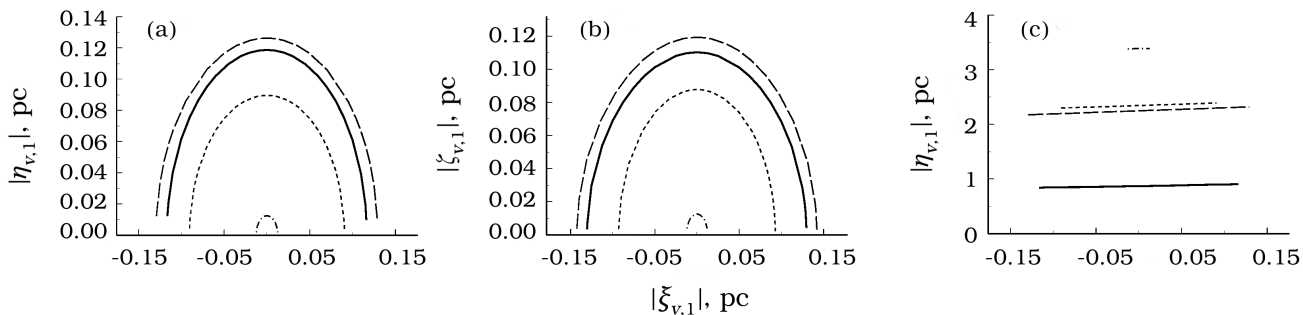


Рис. 6. (а) и (б) — линии пересечения поверхностей нулевых скоростей движения звезды с массой m_1 — компонента ДЗ плоскостями $\zeta = 0$ и $\eta = 0$ соответственно, в системе координат (ξ, η, ζ) , полученные для траектории центра масс ДЗ, приведенной на рис. 2d. Сплошными линиями показаны зависимости от $\xi_{v,1}$ приливных расстояний $|\eta_{v,1}|$ и $|\xi_{v,1}|$ звезды m_1 от центра масс ДЗ при $r_b \simeq 2.8856$ пк $< r_{b,\gamma}$; штриховыми и штрих-пунктирными линиями приведены эти зависимости при $r_b \simeq 3.2268$ пк $> r_{b,\gamma}$; (с) положения звезды m_1 — компонента ДЗ на плоскости $(\xi_{v,1}, |\eta_{v,1}|)$. Сплошные линии получены при $\xi_{1,t} \simeq 0.1298$ пк, штриховые линии получены при $\xi_{1,t} \simeq -0.1426$ пк (длинные штрихи) и при $\xi_{1,t} \simeq 0.4986$ пк (короткие штрихи); штрих-пунктирная кривая получена при $\xi_{1,t} \simeq -1.5425$ пк.

отношений между координатами и скоростями движения звезд-компонентов ДЗ, достаточными для достижения ими соответствующих ПНС, рассмотрим следующий случай. Пусть $v_1 \neq 0$, $\dot{\eta}_1 \neq 0$, $\xi_1 \neq 0$, $\dot{\xi}_j = 0$ ($j = 1, 2$), $\eta_i = \zeta_i = \dot{\zeta}_i = 0$, ($i = 1, 2, 3$). Условием достижения звездой m_1 соответствующей ей ПНС является: $E_{1,2,3} = E_v(\dot{\eta}_1) = \epsilon_{c,1,2,3}$, где величина $E_{1,2,3}$ определена в (21), $\epsilon_{c,1,2,3}$ — в (22), а величина $E_v(\dot{\eta}_1)$, согласно (21), может быть записана в следующем виде:

$$\left\{ \begin{aligned} E_v(\dot{\eta}_1) &= \frac{m_1 \dot{\eta}_1^2}{2\mu_2} + \frac{m_b^2}{2m_3} (r_b^2 + \omega^2 r_b^2) - \frac{M r_b^2}{2} \\ &- \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{m_1 \xi_1^2}{\mu_2} + m_3 \xi_3^2 - M r_b^2 \right) - \frac{G m_1 m_2 \mu_2}{|\xi_1|} \\ &+ m_1 \left(\frac{-\alpha}{\sqrt{(\xi_3 - \xi_1)^2}} + \beta \ln \left(\sqrt{(\xi_3 - \xi_1)^2} \right) \right) \\ &+ m_2 \left(\frac{-\alpha}{\sqrt{(\lambda_{\xi,1} + \xi_3)^2}} + \beta \ln \left(\sqrt{(\lambda_{\xi,1} + \xi_3)^2} \right) \right), \end{aligned} \right. \quad (27)$$

где величина $\lambda_{\xi,1}$ определена в (25).

Численное решение уравнения $E_v(\dot{\eta}_1) = \epsilon_{c,1,2,3}$ относительно величины ξ_1 при заданном значении $\dot{\eta}_1$ может быть получено методом Ньютона.

Аналогичные вычисления в случае $v_1 \neq 0$, $\dot{\xi}_1 \neq 0$, $\eta_1 \neq 0$, $\dot{\eta}_j = \xi_j = 0$ ($j = 1, 2$), $\zeta_i = \dot{\zeta}_i = 0$, ($i = 1, 2, 3$), приводят к уравнению $E_u(\dot{\xi}_1) = \epsilon_{c,1,2,3}$,

где

$$\left\{ \begin{aligned} E_u(\dot{\xi}_1) &= \frac{m_1 \dot{\xi}_1^2}{2\mu_2} + \frac{m_b^2}{2m_3} (r_b^2 + \omega^2 r_b^2) - \frac{M r_b^2}{2} \\ &- \frac{\omega^2}{2} \left(\frac{m_1 \xi_1^2}{\mu_2} + m_3 \xi_3^2 - M r_b^2 \right) - \frac{G m_1 m_2 \mu_2}{|\eta_1|} \\ &+ m_1 \left(\frac{-\alpha}{\sqrt{\xi_3^2 + \eta_1^2}} + \beta \ln \left(\sqrt{\xi_3^2 + \eta_1^2} \right) \right) \\ &+ m_2 \left(\frac{-\alpha}{\sqrt{\xi_3^2 + \lambda_{\eta_1}^2}} + \beta \ln \left(\sqrt{\xi_3^2 + \lambda_{\eta_1}^2} \right) \right), \end{aligned} \right. \quad (28)$$

где величина $\lambda_{\eta,1}$ определена в (25).

Численное решение уравнения $E_v(0) = \epsilon_{c,1,2,3}$ относительно ξ_1 приводит к оценке $\xi_1 \simeq \xi_{1,t}$ (с точностью в 7–9 значащих цифр после десятичной точки). С такой же точностью было получено и численное решение уравнения $E_u(0) = \epsilon_{c,1,2,3}$ относительно $\eta_1 \simeq \eta_{v,1}$ (см. (26) и рис. 6а). Модули величин ξ_1 и η_1 , полученных при решении уравнений $E_v(\dot{\eta}_1) = \epsilon_{c,1,2,3} = E_u(\dot{\xi}_1)$ для значений $v_1 = |\dot{\xi}_1| = |\dot{\eta}_1| = 0$, примерно в 2396.8–2665.1 раз больше величин $|\xi_1|$ и $|\eta_1|$, полученных при $v_1 = 5$ пк млн лет⁻¹.

Круговая скорость V_c движения тела приведенной массы m относительно центра масс ДЗ в рамках кеплеровой задачи о движении изолированной пары звезд с массами m_1 и m_2 связана соотношением $V_{1,c} = \mu_2 V_c$ с соответствующей скоростью $V_{1,c}$ движения тела с массой m_1 относительно центра масс ДЗ (см., например, (13.2) из Landau and Lifshits (1988)). Увеличивая v_1 от 0 до 5 пк млн лет⁻¹ ($1 \text{ км с}^{-1} \simeq 1 \text{ пк млн лет}^{-1}$),

согласно (27) и (28), находим, что $v_1/V_{1,c} \rightarrow \sqrt{2}$ (начиная от $v_1/V_{1,c} = 0$). При этом эксцентриситет орбиты $e \rightarrow 1$ (начиная от $e = 0$). Здесь оценка величины e получена согласно $e = \frac{r_{1,\max} - r_{1,\min}}{r_{1,\max} + r_{1,\min}}$ (см. (15.7) из Landau and Lifshits (1988)), где $r_{1,\max} = |\xi_1|, |\eta_1|$ и $r_{1,\min} = |\xi_1|, |\eta_1|$ получены согласно $E_v(\dot{\eta}_1) = \epsilon_{c,1,2,3} = E_u(\dot{\xi}_1)$ при $v_1 = 0$ и $v_1 = 5$ пк млн лет⁻¹ соответственно.

Таким образом, для ДЗ в силовом поле скопления при увеличении v_1 траектория звезды m_1 от близкой к круговой относительно центра масс ДЗ приближается к параболической орбите. При этом такая ДЗ может достаточно долго находиться в скоплении из-за приливных ограничений на движение компонентов ДЗ в плоскости (ξ, η) (см. выше).

Пусть A_1 — большая полуось эллиптической орбиты звезды m_1 . Уравнение такой орбиты в системе координат (ξ', η') с началом в центре эллипса можно привести к виду: $\eta' = \pm B_1 \sqrt{1 - (\xi'/A_1)^2}$, где B_1 — малая полуось орбиты. Для вычисления длины l_b эллипса аппроксимируем элемент dl_b дуги эллипса соотношением: $dl_b = \sqrt{(d\xi')^2 + (d\eta')^2}$. Подставляя в него выражение для η' , после несложных преобразований запишем:

$$l_b = 4 \int_0^{A_1} \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta'}{d\xi'}\right)^2} d\xi' = \frac{4}{A_1} \int_0^{A_1} \sqrt{\frac{A_1^4 - (A_1^2 - B_1^2)\xi'^2}{A_1^2 - \xi'^2}} d\xi'.$$

Интеграл в выражении для l_b подстановкой $\xi' = A_1 \sin(\psi)$ можно привести к умноженному на A_1^2 полному нормальному эллиптическому интегралу второго рода (см. (21.6)–(30) и Таблицы 1.6–4 из Корн and Корн (1961)), который подробно табулирован и легко интегрируется численно с точностью до 10 (и более) значащих цифр после десятичной точки. Для ДЗ с траекториями компонентов, близкими к круговым, период P обращения звезды m_1 относительно центра масс ДЗ можно оценить по формуле $P = l_b/v_1$.

Рассмотрим ДЗ с центром масс, движущимся в силовом поле скопления по траектории, приведенной на рис. 2d. Пусть траектории ее компонентов близки к круговым в системе координат (ξ, η) . Введем в рассмотрение величины $\Delta\epsilon = k \frac{Gm_1 m_2}{|\xi_{1,t}|}$ и $q = \frac{\Delta\epsilon}{|\epsilon_{c,1,2,3}|}$. Пусть $\epsilon'_{c,1,2,3} = \epsilon_{c,1,2,3} + \Delta\epsilon$. Уравнение $E_v(\dot{\eta}_1) = \epsilon'_{c,1,2,3}$ позволяет исследовать

близкие к круговым траектории компонентов ДЗ. При $r_b = 2.8856$ пк, $v_1 = \dot{\eta}_1 = 0.25$ пк млн лет⁻¹ и $k = 6.749$ это уравнение имеет два положительных корня: $\xi_1 \simeq 0.173869$ пк = $r_{1,\min}$ и $\xi_1 \simeq 0.175817$ пк = $r_{1,\max}$. Указанным выше величинам $k, r_{1,\min}, r_{1,\max}$ соответствуют $q \simeq 0.001379$, $e \simeq 0.005571$, $A_1 = r_{1,\max}/(1 + e) \simeq 0.1748432$ пк, $B_1 = A_1 \sqrt{1 - e^2} \simeq 0.1748405$ пк (см. уравнения (15.7), (15.6), полученные в работе Landau and Lifshits (1988)), $P \simeq 4.394255$ млн лет, $P_c = 2\pi(r_{1,\min} + r_{1,\max})/(2v_1) \simeq 4.394289$ млн лет — период обращения звезды m_1 относительно центра масс ДЗ по круговой орбите со средним радиусом $0.5(r_{1,\min} + r_{1,\max})$, $P/P_{\text{orb}} \simeq 0.236097$, $P_c/P_{\text{orb}} \simeq 0.236099$, где $P_{\text{orb}} = 2\pi \sqrt{A^3/(Gm_b)} \simeq 18.612060$ млн лет — период движения звезды m_1 по кеплеровой эллиптической орбите для изолированной ДЗ (см. уравнение (7.1) из работы Zaslav and Postnov (2011)), $A = A_1 + A_2 = A_1/\mu_2 \simeq 0.43580$ пк, $A_2 = m_1 A_1/m_2$ — большая полуось орбиты звезды с массой m_2 .

Отметим, что величины P и P_c являются оценками локальных значений периода круговой или близкой к круговой орбиты звезды m_1 в плоскости (ξ, η) , т.к. они получены для фиксированного значения r_b и зависят от соотношения между кинетической энергией компонентов ДЗ в плоскости (ξ, η) и потенциальной энергией $-Gm_1 m_2/r_{1,2}$ (см. соответствующие слагаемые в $E_{1,2,3}$ из (21)). В рассмотренном выше примере при движении центра масс ДЗ вдоль траектории, указанной на рис. 2d, и увеличении r_b от 2.45913 пк до 3.73855 пк, величины $E_v(\dot{\eta}_1) < 0$, обеспечивающие круговую или близкую к ней орбиту звезды m_1 в плоскости (ξ, η) , убывают в 1.662 ± 0.013 раз (здесь приведено отношение средних значений $E_v(\dot{\eta}_1)$, полученных по шести значениям $v_1 = \pm 0.25, \pm 0.5, \pm 5.0$ км с⁻¹ для указанных выше двух значений r_b , близких к r_b в периферии и апоцентре траектории центра масс ДЗ). Так как $E_v(\dot{\eta}_1) = E_{1,2,3}$ является интегралом движения, то при движении к периферии скопления ДЗ попадает в более широкие области возможного движения ее компонентов в плоскости (ξ, η) (см., рис. 2b, рис. 3b, рис. 5c), в которых эксцентриситет их орбит возрастает. Поэтому при движении ДЗ к периферии траектории ее компонентов вытягиваются, период радиального движения в плоскости (ξ, η) возрастает и может быть сравним с периодом обращения ДЗ относительно общего центра масс трех тел системы. В этом случае орбитальный период P и скорости движения компонентов ДЗ в плоскости (ξ, η) могут быть определены при численном интегрировании уравнений (19), а постоянство интегралов $E_{1,2,3}$ и $L_{1,2,3}$ может быть исполь-

зовано для контроля точности вычислений. Малые отклонения $E_v(\dot{\eta}_1)$ (и отношений этих величин при двух рассмотренных выше значениях r_b) от средних значений при изменении $|v_1|$ в 20 раз указывают на то, что основным фактором в формировании траекторий компонентов ДЗ является силовое поле скопления, а не величина v_1 . Влияние величины v_1 на траектории компонентов ДЗ возрастает при рассмотрении круговой орбиты центра масс ДЗ относительно центра масс системы трех тел.

Оценки локальных периодов P могут быть полезны при рассмотрении значительно более тесных ДЗ с периодами от нескольких дней до нескольких десятков лет (уже доступными для определений по данным наблюдений (см. Таблицы 6–8 в работе Torres et al. (2021))). В случае ДЗ с круговой орбитой центра масс с параметрами $L_b = 4.368 M_\odot \text{ пк}^2 \text{ млн лет}^{-1}$, $E_b = 1.89471 M_\odot \text{ пк}^2 \text{ млн лет}^{-2}$, $r_b = 3.04921 \text{ пк}$, и начальными фазовыми координатами $\xi_1 = 4.82061 \text{ а.е.}$, $\dot{\eta}_1 = v_1 = -5.0 \text{ пк млн лет}^{-1}$, $\eta_1 = \dot{\xi}_1 = 0$, численное интегрирование уравнений (19) методом Рунге–Кутты четвертого порядка приводит к оценкам $e = 0.04082$, $A = 11.54431 \text{ а.е.}$, $P = 26.95086 \text{ лет}$, $\kappa = P/P_{\text{orb}} = 0.99495$, а при $\xi_1 = 0.03278 \text{ а.е.}$, $\eta_1 = \dot{\xi}_1 = 0$, $\dot{\eta}_1 = -5.0 \text{ пк млн лет}^{-1}$, находим: $e = 0.99344$, $A = 0.04099 \text{ а.е.}$, $P = 2.09161 \text{ дней}$, $\kappa = 0.99998$ (относительные погрешности $\varepsilon_{E_{1,2,3}}$, $\varepsilon_{L_{1,2,3}}$ величин $E_{1,2,3}$, $L_{1,2,3}$ в конце интегрирования уравнений (19) по t при $t \gtrsim 10P$ не превышали $10^{-7} - 10^{-14}$; обычно $\varepsilon_{L_{1,2,3}}$ на 2–3 порядка меньше, чем $\varepsilon_{E_{1,2,3}}$; в следующей работе автор предполагает опубликовать детальное описание использования уравнений (19) для получения параметров орбит компонентов тесных ДЗ; учитывая конечные размеры атмосфер звезд отметим, что второй вариант орбиты звезды m_1 (с $e = 0.99344$) показывает возможность исследования соударений компонентов ДЗ). В рассмотренных вариантах орбит компонентов ДЗ величины P приближаются к кеплеровским периодам P_{orb} при уменьшении A , что указывает на уменьшение влияния силового поля скопления на динамику более тесных ДЗ. Учитывая проведенные оценки величин A и P и их сравнение с данными Torres et al. (2021), можно утверждать, что использование уравнений (19) и интегралов (21) позволяет исследовать практически весь набор ДЗ, данные о которых приведены в работах Torres et al. (2021) и Danilov (2021a).

На рис. 3b показаны кривые зависимостей от r_b величин $|\xi_{c,1,2}|$ для траектории центра масс ДЗ в неоднородном скоплении, приведенной на рис. 3a. При $r_b \gtrsim 3.3927 \text{ пк}$ для каждого значения r_b существуют три решения уравнения (20), приводящие к

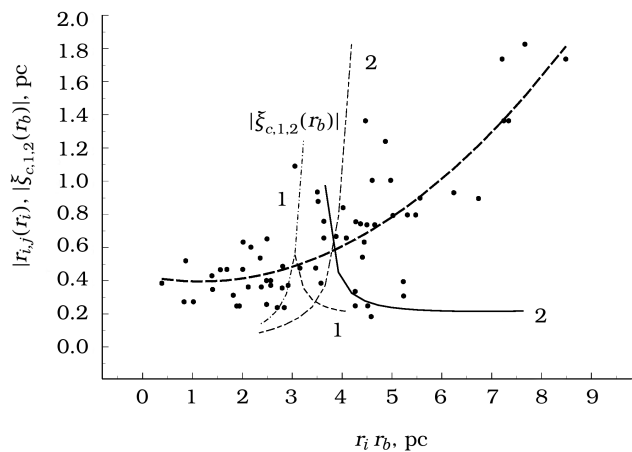


Рис. 7. Зависимости от r_i и r_b величин $r_{i,j}$ и $|\xi_{c,1,2}|$. Жирная пунктирная линия соответствует полученной в работе Danilov (2021a) регрессионной зависимости $r_{i,j}$ от r_i ; остальные линии разных видов соответствуют зависимостям $|\xi_{c,1,2}|$ от r_b для ДЗ с $m_b = 2.08 M_\odot$ и $m_2/m_1 \simeq 0.67$ в неоднородной по плотности модели Плеяд.

оценкам величин $|\xi_{c,1,2}|$. Разным корням уравнения (20) на рис. 3b соответствуют линии разного вида. Для каждого из $|\xi_{c,1,2}|$ существуют по два корня $\eta_{v,1}$ и $\zeta_{v,1}$ уравнений (23) и (24), а также по две кривых зависимостей $|\eta_{v,1}|$ и $|\zeta_{v,1}|$ от $|\xi_{c,1,2}|$ соответствующие решениям уравнений (25) и (26). Для каждого значения r_b меньшим значениям $|\xi_{c,1,2}|$ соответствует большая разница двух полученных оценок $|\eta_{v,1}|$ (и $|\zeta_{v,1}|$) (как и на рис. 6a, b в сравнении с рис. 6c).

Таким образом, для более вытянутых в радиальном направлении траекторий ДЗ при увеличении доступных для движения значений r_b возрастает число точек и областей остановки в движении звезд-компонентов ДЗ по ξ , η и ζ координатам. Это приводит к удерживанию компонентов широких ДЗ на периферии скопления, что подтверждается и увеличением $r_{1,2}$ на периферии скопления в Плеядах (см. рис. 2b из Danilov (2021a), рис. 5 из Danilov (2022)).

На рис. 7 приведены зависимости от r_i взаимных расстояний $r_{i,j}$ между компонентами широких ДЗ и величин $|\xi_{c,1,2}|$ от r_b . Точками на рис. 7 приведены величины $r_{i,j}$ для ДЗ, выделенных по данным Gaia DR2 в работе Danilov (2021a) (см. рис. 2b из Danilov (2021a)); i, j — номера звезд-компонентов ДЗ в выборке II одиночных звезд-членов скопления (см. выше); i — номер одного из компонентов ДЗ, r_i — его расстояние от центра скопления. Цифрами 1 и 2 на рис. 7 помечены близкие к положениям компонентов ДЗ фрагменты кривых зависимостей $|\xi_{c,1,2}|$ от r_b (см. рис. 2b и

рис. 3b), полученных в данной работе для траекторий центров масс ДЗ, показанных на рис. 2а и рис. 3а соответственно. Зависимости от r_b величин $|\xi_{c,1,2}| = |\xi_{1,t}|/\mu_2$, соответствующие разным корням $\xi_{1,t}$ уравнения (20), показаны на рис. 7 линиями разного вида. Отметим, что почти все наблюдаемые ДЗ на рис. 7 расположены выше или значительно выше наименьших значений $|\xi_{c,1,2}|$ (максимальные оценки величин $|\xi_{c,1,2}|$ в апоцентрах рассмотренных траекторий центров масс ДЗ достигают значений 6.52 и 27.63 пк (см. рис. 2b и рис. 3b)).

Согласно Danilov (2021a), скопление Плеяды находится в конце стадии сжатия. В картинной плоскости Плеяд наблюдается сжатие скопления со скоростью $v_d \simeq -0.124 \pm 0.040$ км с⁻¹ на расстоянии $d = 2-3$ пк от центра скопления (Danilov 2021a). Согласно Danilov (2021b), такое сжатие скопления приводит к расширению ДЗ, в результате которого величины $r_{i,j}$ начинают превышать минимальные значения $|\xi_{c,1,2}|$.

Оценки величин $|\xi_{1,t}|$ и $|\eta_{v,1}|$, приведенные на рис. 5b, с и на рис. 6а, с, показывают, что с увеличением r_b размеры области, доступной для движения компонентов ДЗ под ПНС при $r_b < r_{b,\gamma}$ (и между ПНС при $r_b \in [r_{\min}, r_{\max}]$), возрастают. Регрессионная зависимость $r_{i,j}$ от r_i , приведенная жирной штриховой линией на рис. 7, также показывает увеличение расстояний $r_{i,j}$ между компонентами широких ДЗ в Плеядах с расстоянием r_i компонентов ДЗ от центра скопления. Отметим, что такое увеличение $r_{i,j}$ с r_i в основном обусловлено движением центров масс ДЗ вдоль своих траекторий в скоплении.

Наблюдаемые широкие ДЗ в Плеядах находятся глубоко под поверхностью нулевых скоростей с наибольшими значениями $|\xi_{c,1,2}|$. Учитывая результаты работ Angeletti et al. (1983), Angeletti and Giannone (1983), Jefferys (1976), Keenan (1981a; b), Keenan et al. (1973) о большей устойчивости обратных траекторий звезд скоплений в поле Галактики, можно предположить, что компоненты почти всех широких ДЗ в Плеядах движутся в обратном направлении относительно центров масс двойных звезд по сравнению с прямым движением центров масс ДЗ относительно центра масс трех тел (в этом случае $\dot{\varphi} < 0$, см. рис. 1). Приливные ограничения и большая степень устойчивости обратных движений компонентов широких ДЗ на периферии скопления вполне могут приводить к увеличению в скоплении числа широких ДЗ. Такие двойные звезды были недавно обнаружены в работах Danilov (2021a), Deacon and Kraus (2020) по данным Gaia DR2 в трех близких к Солнцу РСЗ.

Оценки массы скопления Плеяды, полученные для звездных величин $m_G \leq 15^m$ и $m_G \leq 18^m$, могут значительно различаться (от 411 до 855 M_\odot (Danilov and Seleznev 2020)). При этом значительная часть массы скопления Плеяды расположена на периферии и в короне скопления (на расстояниях от центра скопления, больших, чем расстояния от него компонентов рассмотренных ДЗ; такие «внешние» массы скопления не влияют на оценки величин $|\xi_{c,1,2}|$; это вызвано сферической симметрией рассмотренных моделей скопления). Согласно Danilov and Seleznev (2020, рис. 10b), в Плеядах пространственные концентрации звезд с $m_G \leq 15^m$ и $m_G \leq 17^m$ в интервале расстояний $r \in [1.2, 6.9]$ пк от центра скопления практически не различаются в пределах погрешностей. Для оценки величин $|\xi_{c,1,2}|$ в уравнениях движения звезд (5) и (19) сравниваются между собой члены, описывающие силу притяжения компонентов ДЗ между собой и силу их притяжения к скоплению. Эти последние члены пропорциональны плотности скопления (см. выше коэффициенты γ и $\gamma_n(r)$, пропорциональные средней или локальной плотности в двух моделях скопления). Параметры ζ_c и Q выбраны так, чтобы распределение плотности $\rho(r) \sim 1/r^2$ в модели скопления хорошо описывало распределение плотности скопления в интервале $2 < r < 4-4.5$ пк (согласно Danilov (2021a), максимальное количество широких ДЗ в Плеядах находится на расстоянии $r \sim 3-4$ пк от центра скопления). При расчете параметров конкретных ДЗ необходимо подбирать величины ζ_c и Q , более точно описывающие плотность в окрестностях рассматриваемой ДЗ в скоплении.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В работе выполнены оценки приливных расстояний $|\xi_{c,1,2}|$ между компонентами широких двойных звезд (ДЗ) в Плеядах. Использовались сведения о параметрах скопления Плеяды и широких ДЗ в Плеядах, полученные в работах Danilov (2021a), Danilov and Seleznev (2020) по данным Gaia DR2. Рассмотрены две модели скопления в виде однородного и неоднородного по плотности гравитирующего шара. Движение центров масс ДЗ в рассмотренных моделях скопления прослежено с помощью интегралов углового момента и энергии движения центров масс ДЗ. В модели системы ДЗ с однородным скоплением получены две эллиптические орбиты центра масс ДЗ с разными эксцентриситетами (см. рис. 2а). В модели с неоднородным скоплением получены две незамкнутые «розеточного вида» траектории движения центра масс ДЗ (см. рис. 3а). Определены параметры рассмотренных орбит и траекторий.

2. В неравномерно вращающейся относительно центра масс трех тел системе координат (ξ, η, ζ) с началом в центре масс ДЗ записаны уравнения движения (5) звезд-компонентов ДЗ в модели однородного скопления. С помощью этих уравнений получена формула (7) для оценки приливных расстояний $|\xi_{c,1,2}|$ между компонентами ДЗ, центр масс которой движется по эллиптической орбите в плоскости (ξ, η) . Получены интегралы (8) углового момента и энергии движения компонентов ДЗ, с помощью которых проведены оценки величин $|\eta_{v,1,2}|$ и $|\zeta_{v,1,2}|$ — размеров области под поверхностью нулевых скоростей компонентов ДЗ вдоль осей η и ζ соответственно. Показано, что величины $|\xi_{c,1,2}|$ и $|\zeta_{v,1,2}|$ в перифериях рассмотренных орбит меньше, чем в их апоцентрах (см. рис. 2b, c). Для величин $|\eta_{v,1,2}|$ существуют два решения: $|\eta_{v,1,2}|_1 = |\xi_{c,1,2}|$ при $r_b \in [r_{\min}, r_{\max}]$ и $|\eta_{v,1,2}|_2 \simeq 1.6|\xi_{c,1,2}|$ для внутренней части орбиты центра масс ДЗ при $r_b \in [r_{\min}, r_{b,\gamma}]$, где r_b — расстояние от центра масс ДЗ до центра масс трех тел, $r_{b,\gamma} < r_{\max}$. Поэтому на внутренней части орбиты центра масс ДЗ существует два ограничения на движение компонентов ДЗ вдоль оси η , а при $r_b > r_{b,\gamma}$, — на внешней части траектории ДЗ — одно.
3. В случае модели неоднородного скопления в неравномерно вращающейся относительно центра масс трех тел системе координат (ξ, η, ζ) (см. рис. 1), записаны уравнения движения этих тел (19). Эти уравнения использовались для записи уравнения (20), позволяющего вычислить приливное расстояние $|\xi_{1,t}| = \mu_2|\xi_{c,1,2}|$ звезды с массой m_1 от центра масс ДЗ, который движется по «розеточной» траектории в плоскости (ξ, η) . Численно определены действительные корни уравнения (20) (см. на рис. 2b и рис. 3b зависимости $|\xi_{c,1,2}|$ от r_b). В зависимости от траектории центра масс ДЗ с увеличением r_b число таких корней возрастает от одного до двух (в менее вытянутой по r_b траектории (см. рис. 2b)) или до трех (в более вытянутой траектории (см. рис. 3b), достигающей больших расстояний r_b от центра масс трех тел).
4. Для уравнений (19) получены интегралы (21) углового момента $L_{\zeta,1,2,3}$ движения тел системы относительно оси ζ и энергии $E_{1,2,3}$. Для оценки ряда параметров широких ДЗ записаны уравнения (23)–(26) и формулы (27), (28). Решения уравнений (23) и (24) для рассмотренных траекторий ДЗ позволяют установить зависимости от r_b расстояний $|\xi_{1,t}|$, $|\eta_{v,1}|$, $|\zeta_{v,1}|$ поверхности нулевых скоростей (ПНС) звезды с массой m_1 до центра масс ДЗ вдоль осей ξ , η , ζ соответственно. Для двух ближайших к нулю корней $\eta_{v,1}$ уравнения (23) показано, что с увеличением r_b размеры более протяженной вдоль оси η области быстро возрастают, а размеры меньшей области возрастают при $r_b < r_{b,\gamma}$ и убывают при $r_b > r_{b,\gamma}$ (см. рис. 5c). Согласно (24), так же для звезды m_1 с увеличением r_b меняются и размеры области под ПНС вдоль оси ζ (см. рис. 5d). При всех значениях r_b для траектории ДЗ, приведенной на рис. 2d, $|\zeta_{v,1}| < |\xi_{1,t}|$, где $\xi_{1,t}$ — наибольший отрицательный корень уравнения (20) (см. рис. 5a).
5. Анализ корней $\xi_{1,t}$, $\eta_{v,1}$, $\zeta_{v,1}$ уравнений (20), (25), (26) показал существование областей разного размера вдоль осей ξ , η и ζ , ограниченных соответствующими ПНС для звезды с массой m_1 (см. рис. 6a, b, c). Вероятно, на периферии большей из этих областей могут преобладать приливо устойчивые широкие ДЗ с обратным движением компонентов относительно центров масс ДЗ. Согласно рис. 6a, b, форма ПНС, соответствующих меньшим значениям $|\eta_{v,1}|$, близка к сферической, а для больших значений $|\eta_{v,1}|$ эти поверхности не замкнуты (см. рис. 6c). Существование в орбитальной плоскости центра масс ДЗ областей с указанными на рис. 5c и рис. 6c ограничениями ($|\eta_{v,1}| \sim 0.7\text{--}3.3$ пк) в движении ее компонентов вдоль оси η является одной из причин отмеченного в статье Danilov (2022) наличия в Плеядах большого числа широких ДЗ с вектором $\mathbf{r}_{1,2}$, ориентированным в направлении на центр скопления, близким к перпендикулярному.
6. Для неизолированных двойных звезд интегралы (21) и уравнения (19) позволяют оценить параметры более тесных ДЗ, близкие к тем, что дает уточненный третий закон Кеплера (см. (15.8), Landau and Lifshits (1988)) для изолированных ДЗ. Интеграл энергии $E_{1,2,3}$ из (21) определяет соотношения между ненулевыми скоростями и координатами компонентов ДЗ в системе (ξ, η, ζ) . Если энергия $E_{1,2,3} = \epsilon_{c,1,2,3}$ достаточна для выхода звезды m_1 из под ПНС на эту поверхность при неравной нулю начальной скорости v_1 , то с увеличением v_1 от 0 до 5 пк млн лет⁻¹ начальные расстояния между компонентами ДЗ, полученные при решении уравнений $E_v(\dot{\eta}_1) = \epsilon_{c,1,2,3} = E_u(\dot{\xi}_1)$ с учетом (27) и (28), уменьшаются примерно в 2400–2670 раз, а траектория звезды m_1 от близкой к круговой относительно центра масс ДЗ приближается к параболической. Такая ДЗ может достаточно долго находиться в скоплении

из-за приливных ограничений на движение компонентов ДЗ (см. выше).

7. Оценки величин $|\xi_{1,t}|$ и $|\eta_{v,1}|$, приведенные на рис. 5б,с и на рис. 6а,с, показывают, что с увеличением r_b размеры области, доступной для движения компонентов ДЗ под ПНС (и между ПНС), возрастают. Согласно рис. 7, оценки взаимных расстояний $r_{i,j}$ между компонентами наблюдаемых в Плеядах широких ДЗ в подавляющем большинстве превышают (или значительно превышают) оценки минимальных величин $|\xi_{c,1,2}|$. Увеличение $r_{i,j}$ с расстояниями r_i компонентов широких ДЗ от центра скопления, обнаруженное в Плеядах (Danilov 2021a) по данным Gaia DR2, в основном обусловлено движением центров масс ДЗ вдоль своих траекторий в скоплении.

ФИНАНСИРОВАНИЕ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, тема FEUZ-2023-0019. Часть работ проведена при финансовой поддержке постановления № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- S. J. Aarseth, *Astrophys. and Space Sci.* **13** (2), 324 (1971).
- L. Angeletti, R. Capuzzo-Dolcetta, and P. Giannone, *Astron. and Astrophys.* **121** (2), 183 (1983).
- L. Angeletti and P. Giannone, *Astron. and Astrophys.* **121** (2), 188 (1983).
- M. R. Bate, I. A. Bonnell, and V. Bromm, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **336** (3), 705 (2002).
- J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, 2nd ed. (Princeton Uni. Press, Princeton, 2008).
- P. Bodenheimer, *ASP Conf. Ser.*, **229**, 67 (2001).
- P. Bodenheimer and A. Burkert, *Proc. IAU Symp.* No. 200, 13 (2001).
- A. G. A. Brown et al. (Gaia Collab.), *Astron. and Astrophys.* **616**, id. A1 (2018).
- J. A. Caballero, I. Novalbos, T. Tobal, and F. X. Miret, *Astronomische Nachrichten* **339** (1), 60 (2018).
- S. Chandrasekhar, *Principles of stellar dynamics* (University of Chicago Press, Chicago, 1942; Moscow, Inostrannaya Literatura, 1948).
- S. Christian, A. Vanderburg, J. Becker, et al., *Astron. J.* **163** (5), 207 (2022).
- V. M. Danilov, *Astronomy Reports* **49** (8), 604 (2005).
- V. M. Danilov, *Astrophysical Bulletin* **76** (1), 55 (2021a).
- V. M. Danilov, *Astrophysical Bulletin* **76** (3), 269 (2021b).
- V. M. Danilov, *Astrophysical Bulletin* **77** (2), 182 (2022).
- V. M. Danilov and A. F. Seleznev, *Astrophysical Bulletin* **75** (4), 407 (2020).
- M. De Furio, M. R. Meyer, M. Reiter, et al., *Astrophys. J.* **925** (2), id. 112 (2022).
- N. R. Deacon and A. L. Kraus, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **496** (4), 5176 (2020).
- H. B. Dwight, *Tables of integrals and other mathematical data*, 4th ed. (New York, The MacMillan Company, 1961; Moscow, Science, Physical-Mathematical Literature, 1973).
- D. C. Hoggie, *Monthly Notices Royal Astron. Soc.* **173**, 729 (1975).
- L. A. Hillenbrand, C. Zhang, R. L. Riddle, et al., *Astron. J.* **155** (2), article id. 51 (2018).
- W. H. Jefferys, *Astron. J.* **81**, 983 (1976).
- T. Jerabkova, G. Beccari, H. M. J. Boffin, et al., *Astron. and Astrophys.* **627**, id. A57 (2019).
- D. W. Keenan, *Astron. and Astrophys.* **95** (2), 334 (1981a).
- D. W. Keenan, *Astron. and Astrophys.* **95** (2), 340 (1981b).
- D. W. Keenan, K. A. Innanen, and F. C. House, *Astron. J.* **78**, 173 (1973).
- G. A. Korn and T. M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers* (McGraw-Hill Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1961).
- L. D. Landau and E. M. Lifshits, *Theoretical physics. Mechanics*, 4th ed., Vol. I (Moscow, Science, 1988) [in Russian].
- S. S. R. Offner, M. M. Dunham, K. I. Lee, et al., *Astrophys. J.* **827** (1), article id. L11 (2016).
- L. A. Pearce, A. L. Kraus, T. J. Dupuy, et al., *Astrophys. J.* **894** (2), id. 115 (2020).
- T. Prusti et al. (Gaia Collab.), *Astron. and Astrophys.* **595**, id. A1 (2016).
- A. N. Raju, D. Guszejnov, and S. S. R. Offner, *Research Notes American Astron. Soc.* **5** (7), id. 164 (2021).
- B. Reipurth, S. Mikkola, M. Connelley, and M. Valtonen, *Astrophys. J.* **725** (1), L56 (2010).
- G. Torres, D. W. Latham, and S. N. Quinn, *Astrophys. J.* **921** (2), id. 117 (2021).
- A. V. Zasov and K. A. Postnov, *General Astrophysics*, 2nd ed. (Vek 2, Fryazino, 2011) [in Russian].

On Tidal Distances Between Components of Wide Binary Stars in the Pleiades

V. M. Danilov¹

¹Kourovka Astronomical Observatory named after K. A. Barkhatova, Ural Federal University named after the first President of Russia B. N. Yeltsin, Yekaterinburg, 620000 Russia

The paper estimates the tidal distances $|\xi_{c,1,2}|$ between the components of wide binary stars (BS) in the Pleiades. We used data on the parameters of the Pleiades cluster and wide BSs in the Pleiades, obtained earlier from the Gaia DR2 data. Two models of a cluster are considered in the form of a gravitating sphere, homogeneous and inhomogeneous in density. Using the integrals of angular momentum and energy of the motion of the centers of mass of the BSs, two elliptical orbits and two open “rosette-like” trajectories of the centers of mass of the BSs relative to the center of mass of the three-body system (the BS components and the cluster) are constructed. For three bodies in a coordinate system nonuniformly rotating relative to their center of mass with the origin at the center of mass of the BS the equations of motion are written. For the model of a homogeneous cluster, a formula is obtained for the value $|\xi_{c,1,2}|$ for a BS moving along an elliptical orbit. The integrals of angular momentum and energy of motion of the components of the BS and three bodies of the system are obtained. The sizes of the area under the surface of zero velocities (SZV) of the BS components along the axes of the coordinate system with the origin in the center of mass of the BS are estimated. It is shown that in the model of a homogeneous cluster, the sizes of the area under the SZV of the BS components in the pericenters of the considered orbits are smaller than in the apocenters, and on the inner and outer parts of the BS orbits there are restrictions on the size of the area under the SZV of the BS components that differ in number and magnitude. For the model of an inhomogeneous cluster, an equation is obtained for the quantity $|\xi_{c,1,2}|$ for the BS moving along the “rosette” trajectory relative to the center of mass of three bodies. The quantities $|\xi_{c,1,2}|$ are numerically determined for the BS at different points of two such trajectories. With the help of the energy integral $E_{1,2,3}$ of the motion of three bodies, the sizes of the area under the SZV of the BS components are determined. With an increase in the distance of the center of mass of the BS from the center of mass of three bodies in the model of an inhomogeneous cluster, an increase in the size of the area under the SZV of the BS components was noted, as well as the existence of more complex restrictions on the size of this area than in a homogeneous cluster. Mutual distances $r_{i,j}$ between the components of wide BSs in the Pleiades are between the maximum and minimum values of $|\xi_{c,1,2}|$ for BSs on “rosette” trajectories. The increase in $r_{i,j}$ with the distances r_i of the BS components from the center of the cluster is mainly due to the motion of the BS along its trajectories in the Pleiades. Other applications of the integral $E_{1,2,3}$ for estimating the BS parameters in the Pleiades are also considered.

Keywords: *stars: kinematics and dynamics—open clusters and associations: individual: Pleiades*